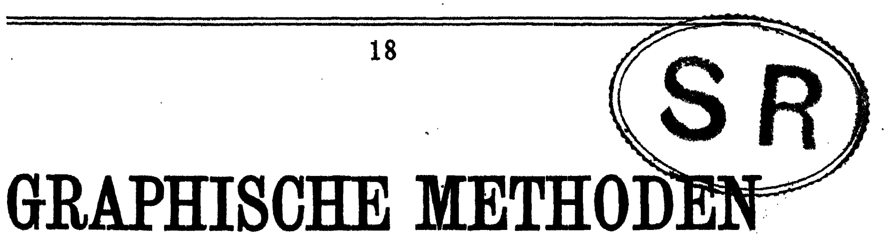
SAMMLUNG MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER LEHRBÜCHER
HERAUSGEGEBEN VON E. TREFFTZ

18



GRAPHISCHE METHODEN

VON

C. RUNGE

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

DRITTE AUFLAGE

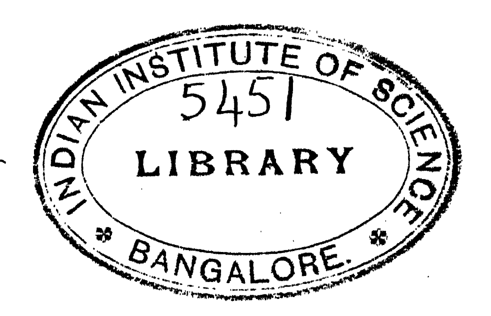
MIT 94 FIGUREN IM TEXT



1928

LEIPZIG · VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · BERLIN

PHOTOMECHANISCHES GUMMIDRUCKVERFAHREN DER DRUCKEREI
B. G. TEUBNER, LEIPZIG



Vorwort zur ersten und zweiten Auflage.

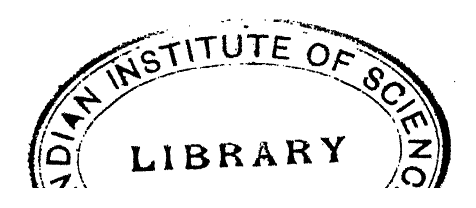
Das vorliegende Buch enthält die Übersetzung der Vorlesungen, die ich im Winter 1909/10 an der Columbia Universität in Newyork in englischer Sprache gehalten habe. Das Original ist in der Serie der Columbia University Lectures mit den Mitteln des Ernest Kempton Adams Research Fund herausgegeben und im Jahre 1912 erschienen. Der Universität Columbia habe ich für die Erlaubnis zu danken, die Vorlesung auch in deutscher Sprache herauszugeben. Die Vorlesungen waren, als sie in Newyork gehalten wurden, mit Übungen verbunden, in denen die graphischen Methoden zur Anwendung kamen. In der Tat ist es für jeden, der sich diese mathematische Disziplin zu eigen machen will, unumgänglich, selbst zu zeichnen. Die Anwendungen finden sich aber so zahlreich auf allen Gebieten mathematischen Denkens, daß man eine Sammlung von Aufgaben entbehren kann.

Die zweite Auflage der graphischen Methoden erscheint im Wesentlichen unverändert. Nur von den Figuren sind eine größere Anzahl neu gezeichnet worden, die allerlei Mängel aufwiesen. Eine Umarbeitung des Textes habe ich dagegen nicht vorgenommen, sondern lasse die Vorlesungen wieder in der Form, in der sie gehalten sind, hinausgehen.

Göttingen, April 1914 und März 1919.

C. Runge.

Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

§ 1.

Die Lösung vieler, wenn nicht aller, mathematischen Probleme besteht in dem Ermitteln der Werte unbekannter Größen, die gewissen gegebenen Bedingungen genügen. Sie zerfällt in verschiedene Schritte, deren erster die Untersuchung ist, ob die gesuchten Größen wirklich existieren, so daß es möglich ist, den gegebenen Bedingungen zu genügen, oder nicht. Ist der Beweis der Unmöglichkeit erbracht, so ist man mit dem Problem fertig. Man nehme z. B. die berühmte Frage nach der Quadratur des Zirkels. Wir können sie formulieren als die Frage nach ganzzahligen Koeffizienten einer algebraischen Gleichung, deren eine Wurzel π ist. Vor dreißig Jahren zeigte Lindemann, daß ganze Zahlen, die diesen Bedingungen genügen, nicht existieren, und damit war ein Problem erledigt, das beinahe so alt ist wie die Geschichte der Menschheit. Ein anderes Beispiel wäre das Fermatsche Problem, für dessen Lösung der verstorbene Herr Wolfskehl aus Darmstadt testamentarisch einen Preis von 100000 Mk. ausgesetzt hat. Es sollen ganze Zahlen x, y, z gefunden werden, die der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen, wobei n eine ganze Zahl größer als 2 ist. Fermats Behauptung, daß es solche Zahlen nicht gäbe, ist vermutlich richtig, hat sich aber bis jetzt nicht erweisen lassen. So kann dieses Problem vielleicht beim ersten Schritt erledigt sein, vielleicht auch nicht.

In vielen Fällen kann der erste Schritt zur Lösung so wenig Schwierigkeiten bieten, daß man sofort zu dem zweiten, dem Aufsuchen der Methode zur Berechnung der gesuchten unbekannten Größen, übergehen kann. Oder es kann, selbst wenn der erste Schritt nicht so leicht ist, zweckmäßig sein mit dem zu zweit genannten anzufangen, denn wenn es gelingt Berechnungsmethoden zu finden, welche die unbekannten Größen bestimmen, so ist der Beweis ihrer Existenz ja einbegriffen. Gelingt es aber nicht, so ist es immer noch Zeit, zum erstgenannten Schritt zurückzukehren.

Eine nicht geringe Zahl von Leuten meint, daß hiermit die Aufgabe des Mathematikers erschöpft sei. Dies beruht, glaube ich, auf der Tatsache, daß der reine Mathematiker nicht gewohnt ist, seine

Untersuchungen auf die Wirklichkeit auszudehnen. Das überläßt er dem Astronomen, dem Physiker, dem Ingenieur. Diese wiederum interessieren sich hauptsächlich für die wirklichen numerischen Werte, die sich aus den mathematischen Rechnungen ergeben. Sie sind gezwungen, die Berechnungen auszuführen, und indem sie dies tun, werden sie vor die Frage gestellt, ob sich dasselbe Ergebnis nicht auf kürzerem Wege oder mit geringerer Mühe erreichen ließe. Gesetzt der Mathematiker gibt ihnen eine zwar vollkommen scharfe und logische Methode an, die aber 200 Jahre unausgesetzter Rechenarbeit zu ihrer Durchführung erfordert, so wären sie wohl berechtigt, dies für wenig besser als nichts anzusehen. So ergibt sich also ein dritter Schritt zur vollständigen Lösung eines mathematischen Problems, nämlich der, diejenige Methode zu finden, die mit dem geringsten Aufwand von Zeit und Mühe zur Lösung führt. Ich behaupte, daß dieser Schritt gerade so gut ein Kapitel der Mathematik bildet, wie die beiden ersten und daß es nicht angeht, ihn den Astronomen, Physikern, Ingenieuren und wer sonst noch mathematische Methoden anwendet, zu überlassen, weil diese Leute ihr Augenmerk nur auf die Ergebnisse richten, und daher geneigt sind, die Verallgemeinerung der von ihnen etwa ersonnenen Methoden zu vernachlässigen, wogegen in der Hand des Mathematikers die Methoden von einem höheren Gesichtspunkte aus entwickelt werden und die Frage nach ihrer Anwendbarkeit auf andere Probleme, auch solche anderer Gebiete wissenschaftlicher Forschung, gehörige Berücksichtigung findet.

Bei dem heutigen Zustand der Dinge sind die Methoden des Ingenieurs und des Feldmessers in vielen Fällen dem Astronomen und Physiker ganz unbekannt und umgekehrt, obgleich die Probleme, mit denen beide Gruppen es zu tun haben, mathematisch beinahe identisch sein können. Ganz besonders gilt dies von den graphischen Methoden, die für bestimmte Aufgaben ausgebildet worden sind. Ihre Verallgemeinerung erlaubt es, sie in einer Unzahl von Fällen anzuwenden, an die ursprünglich nicht gedacht worden war.

In den folgenden Vorlesungen werde ich die graphischen Methoden von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus betrachten, d. h. ich werde versuchen, sie in ihrer allgemeinsten Form darzustellen und zu lehren, um ihre Anwendung auf jedes Problem, mit dem sie mathematisch zusammenhängen, zu erleichtern.[1]) Dem Schüler seien

1) Über die Literatur des Gegenstandes siehe die „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" Art. R. Mehmke, „Numerisches Rechnen" und Art. C. Runge und F. Willers „Numerische und graphische Integration."

praktische Übungen empfohlen. Nur die wiederholte Anwendung der Methode kann ihm zur Beherrschung des Gegenstandes verhelfen. Denn es genügt nicht, die zu Grunde liegenden Gedanken erfaßt zu haben, es ist vielmehr notwendig, sich eine gewisse Leichtigkeit in der Anwendung anzueignen. Man könnte ebenso gut das Klavierspiel nur durch Konzertbesuch, wie die graphischen Methoden nur durch Hören von Vorlesungen zu erlernen hoffen.

Erstes Kapitel.

Graphisches Rechnen.

§ 2. Das graphische Rechnen mit den vier Spezies.

Jede meßbare Größe kann graphisch durch eine gerade Linie dargestellt werden, deren Länge dem Werte der Größe entspricht. Aber das ist keineswegs die einzige Möglichkeit. Auch durch einen Winkel, die Länge einer Kurve, durch den Flächeninhalt eines Dreiecks, eines Quadrats oder einer anderen Figur, durch das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden und sonst noch auf mancherlei Weise könnte man Größen graphisch darstellen und tut es zuweilen. Die Darstellung durch gerade Linien hat einige Vorzüge vor den anderen hauptsächlich die der Leichtigkeit, mit der elementare mathematische Operationen ausgeführt werden können.

Zu welchem Zwecke stellen wir Größen auf dem Papiere dar? Es ist eine bequeme Art sie uns vor Augen zu führen, sie zu vergleichen und zu behandeln. Wäre Papier und Bleistift nicht so billig, oder wäre Linienziehen eine langwierige und schwierige Sache, oder wäre unser Auge ein weniger vollkommen ausgebildetes Werkzeug, so würden die graphischen Methoden an Bedeutung verlieren. Wenn andererseits z. B. elektrische Ströme ebenso leicht und bequem in jedem gewünschten Grade zu beschaffen wären und sich ebenso gut addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren ließen, könnte es sich empfehlen diese zur Darstellung anderer meßbarer Größen, mit denen weniger bequem umzugehen ist, zu verwenden.

Die Addition zweier positiver, durch gerade Linien dargestellter Größen führt man aus, indem man sie in derselben Richtung eine hinter der anderen abträgt. Die Richtung ergibt für jede Strecke einen Anfang und ein Ende. Der Anfangspunkt der zweiten Strecke muß mit dem Endpunkte der ersten zusammenfallen und die gewonnene, die Summe der beiden ausdrückende Strecke läuft vom Anfangspunkte der ersten bis zum Endpunkte der zweiten Strecke. Eben-

so subtrahiert man eine positive Größe von einer anderen, indem man den entsprechenden Strecken verschiedene Richtung gibt, und den Anfangspunkt der abzuziehenden Linie auf den Endpunkt der anderen legt. Das Resultat der Subtraktion wird durch die Strecke ausgedrückt, die vom Anfangspunkte des Minuendus zum Endpunkte des Subtrahendus läuft. Das Resultat ist positiv, wenn diese Richtung mit der des Minuendus und negativ, wenn sie mit der des Subtrahendus übereinstimmt. Dies führt zur Darstellung positiver und negativer Größen durch Strecken entgegengesetzter Richtung. Die Subtraktion zweier positiver Größen voneinander kann dann als Addition einer positiven und einer negativen Größe angesehen werden. Ich will mich nicht mit der logischen Durchführung dieses Gegenstandes aufhalten, sondern die praktische Methode zur Addition einer größeren Zahl positiver und negativer Größen, die durch gerade Linien verschiedener Richtung dargestellt sind, angeben. Man nehme einen geraden Rand, z. B. einen geknifften Papierstreifen, bezeichne ihn an einer Stelle und bestimme eine der beiden Richtungen als die positive. Nun lege man den Kniff nacheinander auf die verschiedenen Strecken und führe einen Zeiger jedesmal soweit wie die betreffende Strecke beträgt und in der durch ihr Vorzeichen angegebenen Richtung daran entlang. Der Zeiger wird zuerst an dem auf dem Papier bezeichneten Punkte aufgesetzt und der Abstand von diesem Punkte bis zu dem, an welchem der Zeiger zuletzt ankommt, stellt dann die Summe der gegebenen Größen dar. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß die dazwischenliegenden Punkte nicht bezeichnet zu werden brauchen, vorausgesetzt, daß der Zeiger seine Stellung beibehält, während der Kniff von einer Strecke zur anderen bewegt wird. Als Beispiel diene die Bestimmung des Flächeninhalts einer Figur (Fig. 1). Man zerlegt die Figur in eine Reihe $^1/_2$ cm breiter rechteckiger Streifen, so daß ihr Flächeninhalt in Quadratzentimetern die Hälfte der Summe der Länge dieser Streifen beträgt. Der gekniffte Rand wird nacheinander auf jeden der Streifen gelegt und der Zeiger ihrer Längsseite entlanggeführt. Den Rand versehe man mit einer Zentimeterskala und der Zeiger fange am Nullpunkt an. Dann gibt die Endstellung des Zeigers den doppelten Wert des Flächeninhaltes in Quadratzentimetern an. Es ist nicht nötig, die Streifen, wie auf der Figur zu zeichnen; eine Schätzung der Längen genügt, nur die Breite muß eingetragen werden. Ist die

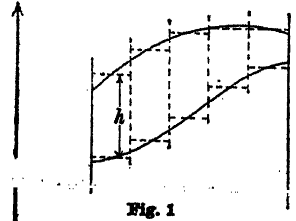


Fig. 1

Skala zu kurz, um die Summe aller Streifen zu messen, so braucht man nur jedesmal den über das Ende hinauslaufenden Streifen zu zerlegen, mit dem überschüssigen Teil wieder von vorne anzufangen und zu zählen wie oft nacheinander der Zeiger die ganze Skala durchlaufen hat. Sehr bequem läßt sich am Läufer eines Rechenschiebers ein kleiner Zeiger aus Papier befestigen, so daß er an der metrischen Skala am Rande des Rechenschiebers hin und her geführt werden kann. Der Flächeninhalt einer Figur läßt sich auf diese Art schnell und mit einer Genauigkeit bestimmen, die sich wohl mit der eines guten Planimeters vergleichen läßt. Soll der Flächeninhalt einer geschlossenen Kurve bestimmt werden, so muß man durch parallele Linien auf jeder Seite ein Segment abschneiden (Fig. 2), den Flächeninhalt zwischen den Parallelen auf die oben beschriebene Art feststellen und den der beiden Segmente für sich ermitteln. Wenn die Kurven der Segmente ohne zu große Ungenauigkeit als Teile einer Parabel angesehen werden können, so wird der Flächeninhalt des Segments $^2/_3$ des Produktes von Länge und Breite betragen. Ist dies nicht der Fall, so muß man die Figur schätzungsweise durch ein oder mehrere Rechtecke ersetzen.

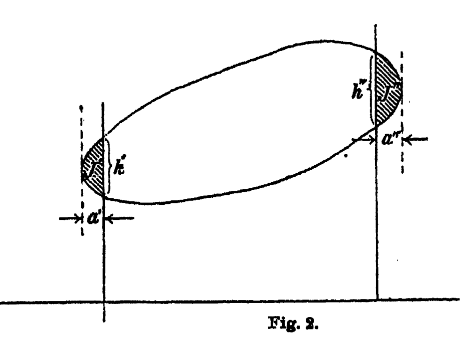


Fig. 2.

Auf dieselbe Art läßt sich Addition und Subtraktion reiner Zahlen ausführen. Man braucht nur die Zahlen als das Verhältnis der Längen geradliniger Strecken zu einer festen Strecke auszudrücken, dann ist das Verhältnis der Länge der Summe der Strecken zu der Länge der festen Strecke gleich der Summe der gegebenen Zahlen. Dies läßt sich auch auf positive und negative Zahlen anwenden, wenn man sie als das Verhältnis der Längen geradliniger Strecken von verschiedener Richtung zu der Länge einer gegebenen Strecke darstellt.

Um eine gegebene Größe c mit einer gegebenen Zahl zu multiplizieren, drückt man die Zahl als das Verhältnis der Längen zweier gerader Linien $\frac{a}{b}$ aus. Die Größe c wird ebenfalls durch eine Strecke von bestimmter Länge ausgedrückt, dann gilt es nur, eine Strecke x zu finden, deren Länge sich zu der von c verhält wie a zu b. Dies

kann man auf mehrere Weisen durch Konstruktion zweier ähnlicher Dreiecke erreichen, von denen das erste zwei Seiten von der Länge a und b, das zweite als die der Seite b entsprechende Seite die Strecke c hat. Am bequemsten ist es gewöhnlich, die Strecken a und b rechtwinklig zueinander aufzutragen und das zweite Dreieck mit einer der Hypotenuse des ersten parallelen (Fig. 3) oder aber zu ihr senkrechten Hypotenuse (Fig. 4) zu zeichnen. Mit derselben Konstruktion läßt sich die Division durch eine gegebene Zahl ausführen, denn Multiplikation mit $\frac{a}{b}$ ist dasselbe wie Division durch $\frac{b}{a}$.

Fig. 3.

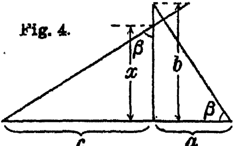
Sind a, b, c beliebige gegebene Zahlen, so können wir sie als das Verhältnis dreier Geraden zu einer bestimmten Strecke ausdrücken. Dann ist das Verhältnis der durch die in Fig. 3 und 4 vorgeführte Konstruktion gefundenen Strecke zu der bestimmten gleich der Zahl $\frac{ac}{b}$. Multiplikation und Division werden so gleichzeitig ausgeführt. Um nur zu multiplizieren, muß man b, um nur zu dividieren a oder c gleich 1 setzen.

Die Multiplikation und Division positiver und negativer Größen läßt sich auf folgende Weise mit einschließen. Die den Strecken a, x (Fig. 3) entsprechenden Strecken werden, wenn sie als positiv gelten sollen, vom Nullpunkt nach rechts, wenn negativ, nach links abgetragen. Ebenso werden die b, c entsprechenden Strecken für positive Zahlen nach oben, für negative nach unten gelegt. Dann wird eine durch den Endpunkt der Strecke c gezogene Parallele zu der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ab immer zu der Zahl

$$x = \frac{ac}{b}$$

führen, gleichgültig welches die Vorzeichen von a, b, und c sein mögen.

Fig. 4.



Diese Definition stimmt nicht für die in Fig. 4 angegebene Konstruktion. Wenn hier die positive Richtung der a entsprechenden Strecke nach rechts und die positive Richtung der b entsprechenden Strecke nach oben zu angenommen werden, dann müssen die positiven Richtungen von x und c so liegen, daß, wenn das rechtwinklige Dreieck x, c um 90 Grad gedreht wird, um die positive Richtung von x mit der von a zu-

sammenfallen zu lassen, die positive Richtung von c mit der von b zusammenfällt. Wollen wir die positive Richtung von x nach oben zu annehmen, dann muß die von c nach links gerechnet werden, oder soll die positive Richtung von c nach rechts laufen, so muß die von x nach unten liegen. Behält man dies im Auge, so schließt auch diese Konstruktion die Vorzeichen ein.

§ 3. Ganze Funktionen.

Wir haben gezeigt, wie gegebene Zahlen graphisch addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden können, indem man sie durch das Verhältnis der Längen gerader Linien zu einer bestimmten Strecke ausdrückt und als Resultat dann das Verhältnis der Länge einer gewissen Linie zu derselben bestimmten Strecke erhält. Durch Wiederholung dieser Konstruktion wird es nun auch möglich, den Wert eines beliebigen, auf diese vier Operationen in irgend welcher Reihenfolge oder Wiederholung aufgebauten, algebraischen Ausdrucks zu finden. Sehen wir zu, wie sich z. B. die Werte einer ganzen Funktion von x, d. h. eines Ausdrucks von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + \cdots + a_n x^n,$$

wo $a_0, a_1, \cdots a_n, x$ beliebige positive oder negative Zahlen sind, durch eine geometrische Konstruktion ermitteln lassen. Nehmen wir zunächst an, daß alle vorkommenden Zahlen positiv seien, obgleich sich die Methode ohne die geringste Schwierigkeit auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen läßt.

$a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$ werden nacheinander auf einer Vertikalen, die wir die y-Achse nennen, abgetragen, als sollte die ihre Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ darstellende Linie gefunden werden.

Die Längen dieser Strecken, in einer geeigneten Längeneinheit gemessen, sind gleich den durch dieselben Buchstaben bezeichneten Zahlen. In Fig. 5 läuft a_0 vom Punkte O bis zum Punkte C_1, a_1 von C_1 bis zu C_2, $\cdots a_n$ von C_n bis zu C_{n+1}.

Es sei x gleich dem Verhältnis der Strecken Ox zu $O1$, (Fig. 5), welche auf der Horizontalen von O nach rechts hin abgetragen werden. Die Entfer-

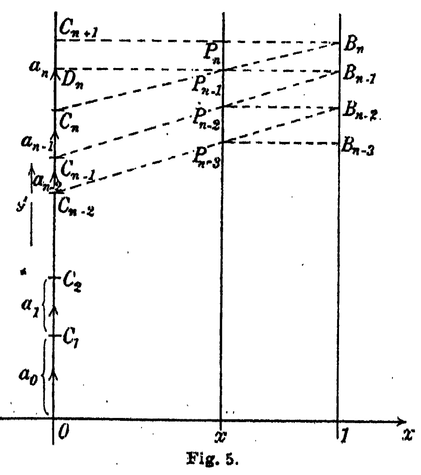


Fig. 5.

nung $O1$ wählt man von geeigneter Länge, unabhängig von der Einheit, in welcher die Strecken $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ gemessen werden. Die Länge Ox ist also durch den Wert des Verhältnisses x bestimmt. Durch x und 1 werden Parallelen zur y-Achse gezogen. Durch C_{n+1} wird eine Parallele zu Ox gezogen, welche die vorigen Parallelen in P_n und B_n schneidet. Nun zieht man die Verbindungslinie $B_n C_n$, welche die Parallele durch x in dem Punkte P_{n-1} schneidet. Dann wird die Höhe von P_{n-1} über C_n gleich $a_n x$ sein. Denn, wenn wir durch P_{n-1} eine Parallele zu Ox ziehen, welche die y-Achse in D_n schneidet, wird das Dreieck $C_n D_n P_{n-1}$ dem Dreieck $C_n C_{n+1} B_n$ ähnlich und das Verhältnis ihrer Seiten gleich x sein, daher $C_n D_n = a_n x$. Folglich ist die Höhe von P_{n-1} über C_{n-1} gleich

$$C_{n-1} D_n = a_n x + a_{n-1}.$$

Man wiederhole nun dieselbe Operation, indem man den Punkt D_n an Stelle von C_{n+1} setzt. Durch D_n wird eine Parallele zu Ox gelegt, welche die durch x und 1 gelegten in P_{n-1} und B_{n-1} schneidet, und die Verbindungslinie von B_{n-1} nach C_{n-1} gezogen, die die x-Parallele in P_{n-2} schneidet. Dann ist die Höhe von P_{n-2} über C_{n-1} gleich

$$C_{n-1} D_n \cdot x = (a_n x + a_{n-1})x$$

und die Höhe über C_{n-2} gleich

$$a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$$

und so fort. Man zieht $P_{n-2} B_{n-2}$ parallel zu Ox, verbindet B_{n-2} mit C_{n-2} und erhält damit den Punkt P_{n-3}. Seine Höhe über C_{n-2} ist dann gleich

$$(a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2})x$$

und über C_{n-3} gleich

$$a_n x^3 + a_{n-1} x^2 + a_{n-2} x + a_{n-3}.$$

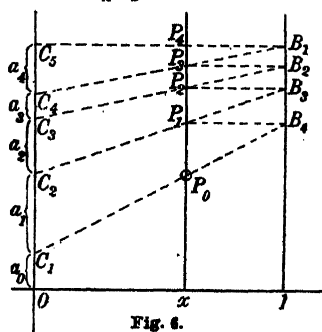


Fig. 6.

Schließlich ergibt sich als Schnittpunkt von $B_1 C_1$ mit der durch x gelegten Parallele zur y-Achse ein Punkt P_0 (siehe Fig. 6 für $n=4$), dessen Höhe über der x-Achse gleich

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ist. Wir wollen die Linie xP_0 mit y bezeichnen, so daß

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

in dem Sinne, daß y eine Vertikale derselben Richtung und Länge ist wie die Summe der Vertikalen $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, $\cdots a_1 x$, a_0.

Dieselbe Konstruktion gilt auch für negative Werte von x oder für solche, die größer sind als 1. Der einzige Unterschied ist der, daß der Punkt x in diesen Fällen aus der Strecke $O1$ entweder nach links oder nach rechts hinausrückt. Das negative Vorzeichen von

$$a_n x,\ a_n x + a_{n-1},\ a_n x^2 + a_{n-1} x, \text{ etc.}$$

bedeutet, daß die Richtung der Linien nach unten läuft. Es ist auch keine Änderung erforderlich, um den Fall einzubegreifen, daß $a_0, a_1 \cdots a_n$ nach unten liegen und negativen Zahlen entsprechen. Sie werden auf der y-Achse abgetragen, als sollte die Summe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

gefunden werden, wobei $C_{\alpha+1}$ entweder über oder unter C_α zu liegen kommt, je nachdem a_α nach oben oder unten gerichtet ist. Die Konstruktion kann für eine Reihe von Werten von x wiederholt werden. Dann stellen die Punkte P_0 die Kurve dar, deren Gleichung

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ist, wobei Abszissen und Ordinaten durch x und y in von einander unabhängigen Längeneinheiten ausgedrückt werden.

Um die Kurve für hohe Werte von x zu zeichnen, bedarf es einer Modifikation. $O1$ sehr klein zu wählen, um x auf dem Reißbrett zu behalten, geht nicht an, da die Linien $B_\alpha C_\alpha$ dann zu kurz werden und infolgedessen ihre Richtung nicht genau genug dargestellt sein würde. Das richtige Verfahren besteht in der Veränderung der Variabeln. Man setzt z. B. $X = \frac{x}{10}$, so daß X 10mal so klein wird wie x und setzt

$$A_\alpha = a_\alpha \cdot 10^\alpha.$$

Dann erhalten wir, da

$$y = a_0 + a_1 \cdot 10 \frac{x}{10} + a_2\, 10^2 \frac{x^2}{10^2} + \cdots + a_n 10^n \frac{x^n}{10^n}$$

$$y = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots + A_n X^n.$$

Man trage die Strecken $A_0, A_1, \cdots A_n$ in einem geeigneten Maßstabe ab und lasse X die Rolle von x übernehmen. Die Kurve unterscheidet sich nun von der gesuchten im Maßstabe und die Verkleinerung des Maßstabes kann nach Belieben für Abszissen und Ordinaten verschieden oder auch gleich gewählt werden, so daß die gezeichnete Kurve der gesuchten im Verhältnis von $1:10$ ähnlich wird. Es ist klar, daß in derselben Weise auch jede andere Verklei-

nerung vorgenommen werden kann. Je größer das Verhältnis $\frac{x}{X}$ angenommen wird, um so größer wird der Wert von A_n im Vergleich zu den Koeffizienten mit kleinerem Index, so daß für die Gestalt der Kurven in sehr kleinem Maßstabe alle Glieder unwesentlich werden außer $A_n X^n$. In diesem Falle werden die Punkte $C_1, C_2 \cdots C_n$ sehr nahe mit O zusammenfallen und nur C_{n+1} wird davon abstehen.

Es ist eine interessante Bemerkung, daß man, um eine ganze Funktion

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

für irgend einen Wert von x zu berechnen, am besten genau in derselben Weise vorgeht wie die geometrische Konstruktion. Der Koeffizient a_n wird zuerst mit x multipliziert und a_{n-1} hinzugezählt. Nennen wir das Resultat a'_{n-1}. Dies multipliziert man wieder mit x und zählt a_{n-2} hinzu. Nennen wir das Resultat a'_{n-2}. Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich einen Wert von a'_0, der dem Wert der Funktion für den betrachteten Wert von x gleich ist. Mit dem Rechenschieber lassen sich alle Multiplikationen mit x durch eine einzige Stellung des Schiebers ausführen. Die Koeffizienten a_α und die Werte a'_α schreibt man am besten auf folgende Weise in Reihen

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & a_n x & a'_{n-1} x & \cdots & a'_2 x & a'_1 x \\ \hline & a'_{n-1} & a'_{n-2} & \cdots & a'_1 & a'_0. \end{array}$$

Die Genauigkeit des Rechenschiebers ist ziemlich die gleiche wie die einer guten Zeichnung. Aber die Geschwindigkeit, mit der das Resultat gefunden wird, ist sehr viel größer. Werden also nur ein paar Werte einer ganzen Funktion gesucht, dann lohnt die geometrische Konstruktion die Mühe nicht. Anders liegt die Sache, wenn es sich darum handelt, eine Kurve zu zeichnen. Hier würden die durch Rechnung gefundenen Werte erst konstruiert werden müssen, während die geometrische Konstruktion die Punkte der Kurve direkt liefert und deshalb den Vorzug vor der numerischen Methode verdient.

Es gibt noch eine andere geometrische Methode, die sich in manchen Fällen ebenso empfehlen kann. Suchen wir den Wert einer ganzen Funktion vierten Grades

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

und nehmen wir zunächst an, daß alle Koeffizienten positiv seien.

Die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 werden durch gerade Linien dargestellt, während x durch das Verhältnis zweier Längen ausgedrückt ist. Die Strecken a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 trägt man als gebrochene Linie ab, a_0 nach rechts von C_0 bis C_1, a_1 aufwärts von C_1 bis C_2, a_2 nach links von C_2 bis C_3, a_3 nach unten von C_3 bis C_4, a_4 wieder nach rechts von C_4 bis C_5 (Fig. 7).

Durch C_5 ziehe man eine Linie C_5A nach einem auf der Strecke C_3C_4 oder ihrer Verlängerung gelegenen Punkte A, so daß das Verhältnis $C_4A : C_4C_5$, positiv genommen wenn C_4A die gleiche Richtung hat wie C_3C_4, gleich x sei. Dann haben wir

$$C_4A = a_4x \quad \text{und} \quad C_3A = a_4x + a_3 .$$

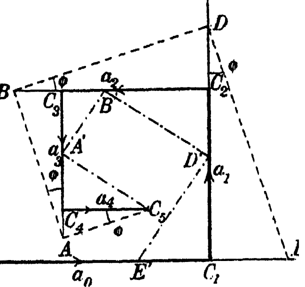


Fig. 7.

C_4A und C_3A sind positiv oder negativ, jenachdem ihre Richtung gleich oder entgegengesetzt ist wie die von C_3C_4. Durch A ziehe man rechtwinklig zu C_5A eine Linie nach einem Punkte B auf der Strecke C_2C_3 oder ihrer Verlängerung. Dann haben wir

$$C_3B = C_3A \cdot x = (a_4x + a_3)x \quad \text{und} \quad C_2B = a_4x^2 + a_3x + a_2 .$$

C_3B und C_2B sind positiv oder negativ, jenachdem ihre Richtung die gleiche oder die entgegengesetzte ist wie die von C_2C_3. Ebenso erhalten wir

$$C_1D = a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1$$

und schließlich

$$C_0E = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 .$$

C_0E ist positiv, wenn E rechts von C_0 und negativ, wenn es links davon liegt. Wenn der Punkt A der Linie C_3C_4 entlang rückt, so rückt E der Linie C_0C_1 entlang, und seine Stellung bestimmt die Werte der ganzen Funktion. Um die Stellung von E für irgendeine Stellung von A zu finden, könnte man ein Stück durchsichtiges quadriertes Papier mit einer Stecknadel auf der Zeichnung im Punkte C_5 so befestigen, daß es frei um ihn drehbar ist. Folgt man den Linien des Netzes über C_5ABDE, nachdem man das Papier um einen kleinen Winkel gedreht hat, so erhält man die Stellung von E für eine neue Stellung von A (Fig. 8).

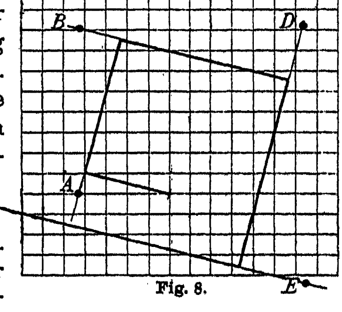


Fig. 8.

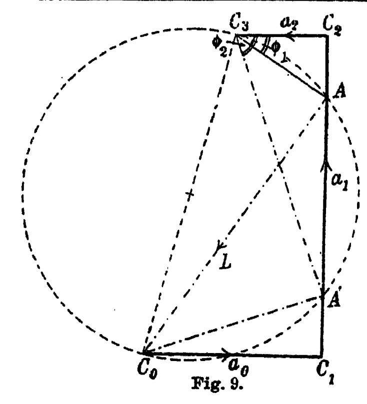


Fig. 9.

Um den Fall von negativen Koeffizienten mit einzuschließen, legt man die betreffende Linie nach der entgegengesetzten Richtung. Ist z. B. a_3 negativ, so würde C_4 über C_3 zu liegen kommen, aber C_3A müßte ebenso wie vorher nach unten positiv, nach oben negativ gerechnet werden.

Daß die Methode auf ganze Funktionen jeden Grades anwendbar ist, leuchtet ein und bedarf keiner weiteren Erörterung. Man kann sich ihrer mit Vorteil bedienen, um die reellen Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grades zu ermitteln. Zu diesem Zwecke muß die gebrochene Linie C_5ABDE so gelegt werden, daß E mit C_0 zusammenfällt. In dem Fall von Fig. 7 z. B. ist leicht zu erkennen, daß es eine reelle Wurzel nicht gibt. Fig. 9 zeigt die Anwendung auf eine quadratische Gleichung. Man schlägt einen Kreis über C_0C_3 als Durchmesser. Die Punkte, in denen er C_1C_2 schneidet, sind die Punkte A und A', die den beiden Wurzeln entsprechen. In diesem Falle sind beide Wurzeln negativ.

Die zuerst angegebene Methode, die Werte einer ganzen Funktion zu konstruieren, kann folgendermaßen auf den Fall ausgedehnt werden, wo die Funktion als Summe einer Anzahl Polynome von der Form

$$y = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)(x-q) + a_3(x-p)(x-q)(x-r) + \cdots$$

gegeben ist.

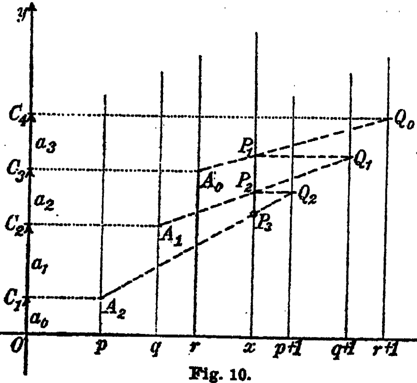


Fig. 10.

Wir nehmen wieder an, daß a_0, a_1, a_2 . . . geradlinige Strecken bedeuten, die, wie vorhin, auf der y-Achse nach aufwärts oder abwärts abgetragen werden, als sollte ihre Summe gefunden werden. x, p, q, r seien Zahlen, die das Verhältnis gewisser Abschnitte auf der Abszissenachse ausdrücken. Betrachten wir den Fall von vier Gliedern, das höchste Polynom sei dritten Grades. Der feste Abstand zwischen den Punkten p und

$p+1$, q und $q+1$, r und $r+1$ auf der Abszissenachse (Fig. 10) ist willkürlich gewählt und die Punkte p, q, r, x sind so bestimmt, daß das Verhältnis von Op, Oq, Or, Ox zu diesem festen Abstand gleich den Zahlen p, q, r, x ist. Für negative Werte werden die Punkte links vom Nullpunkt gelegt.

Man ziehe nun Parallelen zur y-Achse durch p, q, r, x, $p+1$, $q+1$, $r+1$. Auf der Parallele durch $r+1$ bestimme man den Punkt Q_0, dessen Ordinate gleich der von C_4 ist, und auf der Parallele durch r den Punkt A_0, dessen Ordinate gleich der von C_3 ist. Man verbinde A_0 und Q_0 durch eine Gerade. Der Schnittpunkt P_1 dieser Verbindungslinie oder ihrer Verlängerung mit der Parallelen durch x hat über C_3 oder A_0 die Höhe $a_3(x-r)$ und über C_2 die Höhe $a_3(x-r)+a_2$. Man suche nun auf der Parallele durch $q+1$ den Punkt Q_1, dessen Ordinate gleich der von P_1 ist und auf der Parallele durch q den Punkt A_1 mit der Ordinate von C_2. Man verbinde A_1 und Q_1 durch eine Gerade. Der Punkt, wo diese oder ihre Verlängerung die Parallele durch x schneidet, P_2, hat über C_2 oder A_1 die Höhe

$$[a_3(x-r)+a_2]\cdot(x-q),$$

und über C_1 die Höhe

$$a_3(x-r)(x-q)+a_2(x-q)+a_1.$$

Endlich bestimme man auf der Parallele durch $p+1$ den Punkt Q_2 mit der Ordinate von P_2 und auf der Parallele durch p den Punkt A_2 mit der Ordinate von C_1. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie von A_2 und Q_2 oder ihrer Verlängerung mit der Parallele durch x, P_3, hat alsdann über C_1 oder A_2 die Höhe

$$[a_3(x-r)(x-q)+a_2(x-q)+a_1](x-p)$$

und die Ordinate von P_3 ist gleich der gegebenen ganzen Funktion

$$y=a_3(x-r)(x-q)(x-p)+a_2(x-q)(x-p)+a_1(x-p)+a_0.$$

Für hohe Werte von p, q, r, x verfährt man ebenso wie vorhin, indem man neue Zahlen P, Q, R, X einführt, die ein Zehntel oder ein Hundertstel oder einen beliebigen anderen Bruchteil von p, q, r, x betragen, z. B.

$$P=\frac{p}{10},\ Q=\frac{q}{10},\ R=\frac{r}{10},\ X=\frac{x}{10}.$$

Man schreibt dann

$$A_0=a_0,\ A_1=10a_1,\ A_2=100a_2,\ A_3=1000a_3,$$

und erhält

$$y=A_0+A_1(X-P)+A_2(X-P)(X-Q)$$
$$+A_3(X-P)(X-Q)(X-R).$$

Der Maßstab für die Strecken A_0, A_1, A_2, A_3 und y muß dann zweckmäßig verkleinert werden und die Werte werden auf dieselbe Weise wie vorher konstruiert.

Betrachten wir nun die Umkehrung der Aufgabe. Wenn die Werte einer ganzen Funktion für
$$x = p.\ q,\ r,\ s$$
gegeben sind, sollen die Strecken a_0, a_1, a_2, a_3 so bestimmt werden, daß der Wert der ganzen Funktion für irgend einen anderen Wert von x auf die vorher angegebene Weise gefunden werden kann.

Bezeichnen wir die gegebenen Werte der ganzen Funktion für $x = p,\ q,\ r,\ s$ mit y_p, y_q, y_r, y_s und die Punkte auf den Parallelen durch p, q, r, s mit diesen Ordinaten, mit P, Q, R, S (s. Fig. 12).

Für $x = p$ verschwindet die ganze Funktion

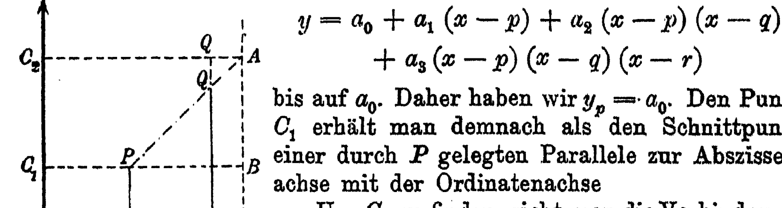


Fig. 11.

$$y = a_0 + a_1 (x - p) + a_2 (x - p)(x - q) + a_3 (x - p)(x - q)(x - r)$$

bis auf a_0. Daher haben wir $y_p = a_0$. Den Punkt C_1 erhält man demnach als den Schnittpunkt einer durch P gelegten Parallele zur Abszissenachse mit der Ordinatenachse

Um C_2 zu finden, zieht man die Verbindungslinie PQ und bezeichnet ihren Schnittpunkt mit der Parallele durch $p + 1$ (Fig. 11) mit A. Eine durch A gelegte Parallele zur Abzissenachse schneidet die Ordinatenachse in C_2. Denn die Differenzen $y_q - y_p$ und $y_a - y_p$ (y_a = Ordinate von A) sind den Differenzen der Abszissen proportional und verhalten sich daher wie $(q - p) : 1$. Daher
$$y_a - y_p = \frac{y_q - y_p}{q - p} = a_1.$$

Ebenso wie den Punkt Q auf der Parallele durch q könnten wir irgend einen Punkt X auf der Parallele durch x mit dem Punkte P verbinden und durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der $p + 1$ Parallelen eine Parallele zur Abszissenachse legen. Nennen wir den Schnittpunkt dieser Parallele mit der durch x, X', und seine Ordinate y'. Dann haben wir
$$y' - y_p = \frac{y - y_p}{x - p} = a_1 + a_2 (x - q) + a_3 (x - q)(x - r).$$

Führen wir diese Konstruktion nicht nur für $x = q$, sondern auch für $x = r$ und $x = s$ aus, so bekommen wir drei Punkte Q', R', S'

ganzen Funktionen $y' = (a_0 + a_1) + a_2 (x - q) + a_3 (x - r)$ darstellen.

Wir haben auf diese Weise die Aufgabe vereinfacht. Anstatt eine ganze Funktion dritten Grades aus vier gegebenen Punkten P, Q, R, S gilt es nunmehr, eine ganze Funktion zweiten Grades aus drei gegebenen Punkten Q', R', S' zu finden. Durch das gleiche Verfahren erzielt man eine zweite Vereinfachung. Man verbindet Q' mit R' und S' durch Gerade und zieht durch deren Schnittpunkte mit der $q + 1$ Senkrechten Parallelen zur Abszissenachse, welche die Senkrechten durch r und s in den Punkten R'' und S'' schneiden. Die Ordinaten dieser Punkte sind die Werte der ganzen Funktion y, welche durch folgende Gleichungen

$$y'' - y'_q = \frac{y' - y'_q}{x - q} = a_2 + a_3 (x - r)$$

für $x = r$ und $x = s$ oder

$$y'' = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 (x - r) \qquad \text{definiert wird.}$$

Die durch den Punkt R'' gelegte Parallele zur Abszissenachse schneidet die Ordinatenachse im Punkte C_3. C_4 endlich finden wir, indem wir durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie $R''\ S''$ oder ihre Verlängerung mit der Senkrechten durch $r + 1$ eine Parallele zur Abszissenachse legen.

Haben wir die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, so können wir die Ordinate

$$y = a_0 + a_1 (x - p) + a_2 (x - p)(x - q) \\ + a_3 (x - p)(x - q)(x - r)$$

für einen beliebigen Wert von x konstruieren und so die Parabel dritten Grades zeichnen, auf welcher die vier Punkte P, Q, R, S liegen.

Man kann die Konstruktion noch etwas vereinfachen, erstens indem man $p + 1 = q$ setzt. Gegeben sind die Punkte P, Q, R, S; es steht uns also vollständig frei, die Senkrechte durch $p + 1$ mit der Senkrechten durch Q zusammenfallen zu lassen. In diesem Falle fällt der Punkt Q' mit Q zusammen. Dann wieder ist die Parabel zweiten Grades durch die Punkte Q' R' S' vom Abstande der beiden durch q und $q + 1$ gelegten Senkrechten und zugleich von der Lage des Punktes P unabhängig. Daher steht es uns vollständig frei, um einen Punkt auf dieser Parabel zu konstruieren, die Senkrechte durch $q + 1$ mit der durch R zusammenfallen zu lassen, selbst wenn der Abstand der Senkrechten durch P und Q von dem der Senkrechten durch Q und R verschieden ist. In diesem Falle werden die Punkte R'' und R' zusammenfallen. Das Verfahren ist in Fig. 12 abgebildet. Von den

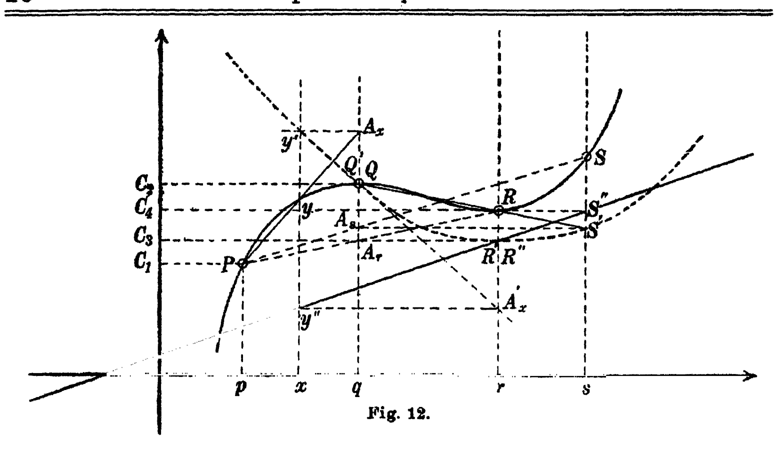


Fig. 12.

Punkten P, Q, R, S ausgehend konstruiert man zuerst die Punkte R', S', indem man R und S mit P verbindet und Horizontalen durch die Schnittpunkte A_r und A_s dieser Verbindungslinien mit der q Vertikalen legt. Darauf wird S'' bestimmt, indem man Q (identisch mit Q') mit S' verbindet und die Horizontale durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der r Vertikalen legt. Nun kann die Gerade $R'' S''$ gezogen werden (da R'' mit R' identisch ist). Von dem Schnittpunkte der Senkrechten durch einen beliebigen Punkt x mit $R'' S''$ gelangt man auf der Horizontalen zu dem Punkte A'_x auf der Senkrechten durch r. Man verbinde Q' mit A'_x und nehme den Schnittpunkt dieser Linie mit der Senkrechten durch x. Dieser Punkt liegt auf der Parabel durch $Q' R' S'$. Er führt auf der Horizontalen zu dem Punkte A_x auf der Senkrechten durch q und man zieht nun die Verbindungslinie $A_x P$. Ihr Schnittpunkt mit der Senkrechten durch x liegt auf der Parabel dritten Grades durch $PQRS$.

Es ist klar, daß sich diese Methode auf jede Anzahl gegebener Punkte anwenden läßt, wobei der Grad der Parabel immer um Eins kleiner ist als die Zahl der gegebenen Punkte.

Durch dieselbe Methode wie die Werte einer ganzen Funktion lassen sich auch die Werte jeder rationalen Funktion

$$y = R(x)$$

konstruieren. Denn eine rationale Funktion kann immer auf die Form eines Quotienten zweier ganzer Funktionen gebracht werden

$$R(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

Nachdem man also Kurven konstruiert hat, deren Ordinaten die Werte von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ für eine beliebige Abszisse x (Fig. 13) angeben, findet man $R(x)$ auf folgende Weise. Durch einen Punkt P auf der Abszissenachse zieht man eine Parallele zur Ordinatenachse. G_1 und G_2 seien

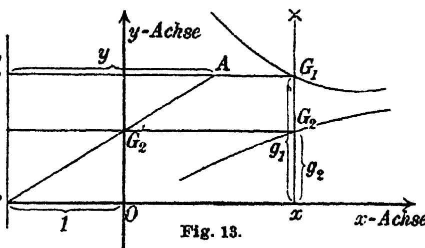


Fig. 13.

die Punkte, deren Ordinaten gleich $g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind. Von G_1 gelangt man auf der Horizontalen zu G_1' auf der Senkrechten durch P und von G_2 zu G_2' auf der Ordinatenachse. Man ziehe die Verbindungslinie PG_2' und verlängere sie bis sie in A die Horizontale durch G_1 schneidet. Dann ist $R(x)$ gleich dem Verhältnis $G_1' A$ zu PO. $G_1' A$ kann dann als Ordinate auf der x Senkrechten abgetragen werden und bestimmt den Punkt, dessen Ordinate gleich $R(x)$ ist, wenn OP als Längeneinheit gewählt wird.

§ 4. Lineare Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen.

Betrachten wir eine lineare Funktion einer Zahl von Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ gegebene positive und negative Zahlen sind. Die Frage ist, wie der Wert dieser linearen Funktion für verschie-

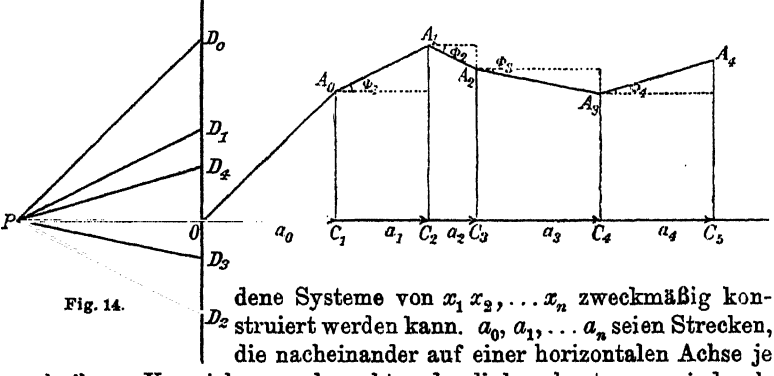


Fig. 14.

dene Systeme von $x_1\, x_2, \ldots x_n$ zweckmäßig konstruiert werden kann. $a_0, a_1, \ldots a_n$ seien Strecken, die nacheinander auf einer horizontalen Achse je nach ihrem Vorzeichen nach rechts oder links abgetragen sind, als gälte es ihre Summe

$$a_0 + a_1 + a_2 \cdots + a_n$$

zu finden. a_0 beginnt im Punkte O und endet bei C_1, a_2 beginnt in C_1 und endet bei C_2 usw. (Fig. 14.) Die Zahlen $x_1\,x_2 \ldots x_n$ werden durch die Verhältnisse von je zwei Längen ausgedrückt. Man zieht eine Senkrechte durch O und wählt einen Punkt P auf der horizontalen Achse. Es sei das Verhältnis $\frac{OD_1}{PO} = x_1$, $\frac{OD_2}{PO} = x_2$, usw. Wenn P links vom Nullpunkt angenommen wird, gilt der Punkt D_1 über O als ein positiver Wert von x_1, unter O als ein negativer; ebenso die anderen Punkte. Auf der Senkrechten wird über O ein Punkt D_0 in der gleichen Entfernung von O wie P bezeichnet, und der Punkt P mit den Punkten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, ... verbunden. Dann zeichnet man eine gebrochene Linie $O\,A_0\,A_1\,A_2\,A_3\,A_4$, so daß A_0 auf der Senkrechten durch C_1 liegt, und OA_0 zu PD_0 parallel ist; A_1 liegt auf der Senkrechten durch C_2, und A_0A_1 ist parallel PD_1, A_2 liegt auf der Senkrechten durch C_3, und A_1A_2 ist parallel PD_2 usw. Dann wird die Ordinate y_0 von A_0 die gleiche Länge wie a_0 haben und nach oben gerichtet sein, wenn a_0 nach rechts, nach unten, wenn a_0 nach links läuft. Die Differenz $y_1 - y_0$ der Ordinaten von A_1 und A_0 ist an Länge gleich a_1x_1, da $y_1 - y_0$ und a_1 in dem gleichen Verhältnis stehen wie OD_1 und PO. A_1 wird über oder unter A_0 liegen, je nachdem a_1x_1 nach rechts oder nach links läuft, und es versteht sich, daß a_1x_1 für positive Werte von x_1 die gleiche, für negative die entgegengesetzte Richtung hat, wie a_1. So hat die Ordinate y_1 die gleiche Länge wie die Strecke $a_0 + a_1x_1$ und läuft nach oben oder unten, je nachdem die Richtung der Linie $a_0 + a_1x_1$ nach rechts oder nach links läuft. Ebenso wird bewiesen, daß die Ordinate y_2 des Punktes A_2 die gleiche Länge hat wie

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

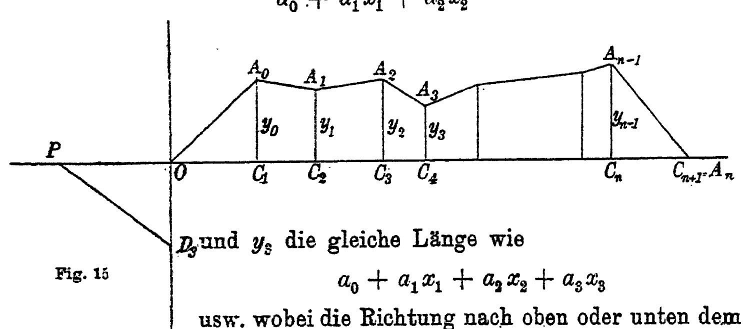


Fig. 15

und y_3 die gleiche Länge wie

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

usw. wobei die Richtung nach oben oder unten dem positiven oder negativen Wert der linearen Funktion entspricht.

Wenn die Werte von x_1, x_2, ... x_n der Gleichung

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

genügen, muß die Ordinate y_n verschwinden, d. h. der Punkt A_n muß mit C_{n+1} dem Endpunkt der Strecke a_n zusammenfallen. Und umgekehrt: der Gleichung ist genügt, wenn A_n und C_{n+1} zusammenfallen.

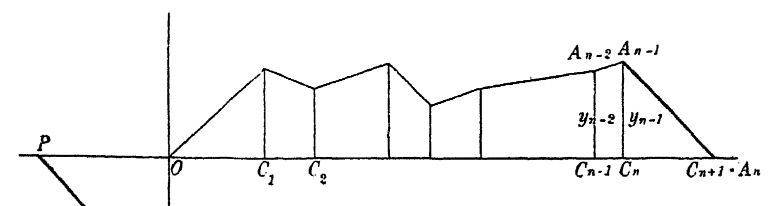


Fig. 16.

Folglich kann, wenn alle Werte der Zahlen x_1, x_2. ... x_n bis auf einen bekannt sind, der unbekannte Wert auf graphischem Wege gefunden werden. Denn, gesetzt x_3 sei der unbekannte Wert, so kann man die gebrochene Linie von O anfangend bis A_2 und dann vom anderen Ende mit A_n anfangend bis A_3 (Fig. 15) zeichnen. Eine Parallele zu $A_2 A_3$ durch P liefert den Punkt 3 auf der Ordinatenachse. Sind x_1, x_2, ... x_{n-1} bekannt und nur x_n nicht, so kann man die gebrochene Linie bis A_{n-1} zeichnen, und, da A_n mit C_{n+1} zusammenfallen muß, eine Parallele zu $A_{n-1} A_n$ durch P ziehen, und so den Punkt D_n auf der Ordinatenachse finden, der durch das bekannte Verhältnis von $\frac{OD_n}{PO}$ oder $\frac{OD_n}{OD_0}$ den Wert von x_n bestimmt. Auf den Figuren 15 und 16 sind alle Koeffizienten positiv. Auf Fig. 17 ist ein Koeffizient a_5 negativ angenommen. Der einzige Unterschied ist der, daß

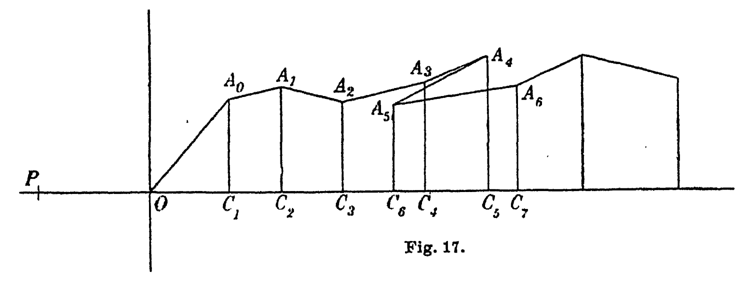


Fig. 17.

C_6 links von C_5 liegt und daß daher die gebrochene Linie von A_4 zu A_5 zurückführt.

Lassen wir die Lage der Punkte D_0, D_1, D_2, ... unverändert, rücken aber den Punkt P nach P' (Fig. 18) und konstruieren von neuem

die gebrochene Linie, so erhalten wir $OA_0'A_1'A_2' \ldots$ an Stelle von $OA_0A_1A_2 \ldots$ Die Ordinate y_α' des Punktes A_α' ist offenbar

$$y_\alpha' = a_0 \frac{OD_0}{P'O} + a_1 \frac{OD_1}{P'O} \cdots + a_\alpha \frac{OD_\alpha}{P'O}$$

und daher
$$y_\alpha' = \frac{PO}{P'O} y_\alpha$$

d. h., durch Verschiebung des Punktes P unter Beibehaltung der Punkte $D_0, D_1, D_2, \ldots$ kann man den Maßstab der Ordinaten der gebrochenen Linie verändern, und zwar umgekehrt proportional dem Abstand PO. Dieses Verfahren empfiehlt sich, um eine geeignete Größenordnung für die Ordinaten zu bekommen, unabhängig von dem für den Ab-

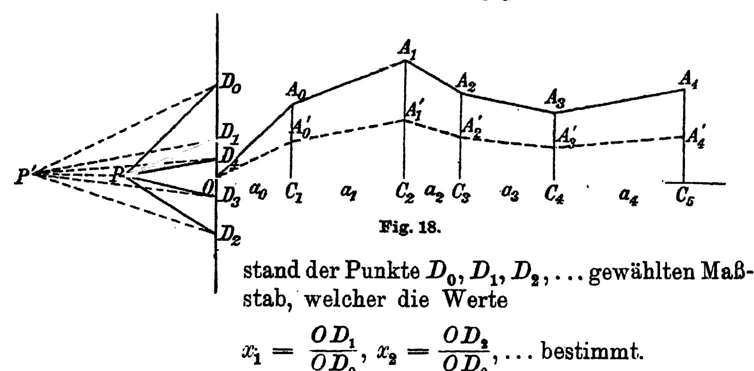


Fig. 18.

stand der Punkte $D_0, D_1, D_2, \ldots$ gewählten Maßstab, welcher die Werte

$$x_1 = \frac{OD_1}{OD_0},\ x_2 = \frac{OD_2}{OD_0}, \ldots \text{ bestimmt.}$$

Eine lineare Gleichung mit nur einer Unbekannten

$$a_0 + a_1 x_1 = 0$$

löst man, indem man durch P eine Parallele zu A_0A_1 legt. Nun sei eine zweite Gleichung mit zwei Unbekannten gegeben:

$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0.$$

Die Strecken b_0, b_1, b_2 werden wie vorher abgetragen. Da wir x_1 aus der ersten Gleichung kennen, so können wir die gebrochene Linie OB_0B_1, die der zweiten Gleichung entspricht, konstruieren, und, da B_2 mit dem Endpunkt von b_2 zusammenfallen muß, durch P eine Parallele zu B_1B_2 legen und x_2 bestimmen. Auf dieselbe Weise kann man x_3 aus einer dritten Gleichung

$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

ableiten und so weiter eine beliebige Anzahl von Unbekannten,

wenn jede Gleichung eine Unbekannte mehr als die vorhergehende enthält.

In dem allgemeinen Falle, wo n Unbekannte aus n linearen Gleichungen gefunden werden sollen, wird nun jede der Gleichungen alle die Unbekannten enthalten, und man wird daher nicht, wie in dem oben behandelten Falle, eine nach der andern ermitteln können. Aber es läßt sich zeigen, daß vermittelst sehr einfacher Konstruktionen der allgemeine Fall auf eine Reihe von Gleichungen eben der Art wie die oben behandelten zurückgeführt werden kann.

Fangen wir mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten an.

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \qquad b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0.$$

Die Strecken a_0, a_1, a_2 werden auf einer Horizontalen $OA_0A_1A_2$ abgetragen und die Strecken b_0, b_1, b_2 auf einer anderen Horizontalen $O'B_0B_1B_2$ (Fig. 19). Nun verbindet man O und O', A_0 und B_0, A_1 und B_1, A_2 und B_2 durch Gerade und zieht eine dritte Horizontale, welche diese Verbindungslinie in den Punkten O'', C_0, C_1, C_2 schneidet. Diese Punkte entsprechen einer bestimmten linearen Funktion

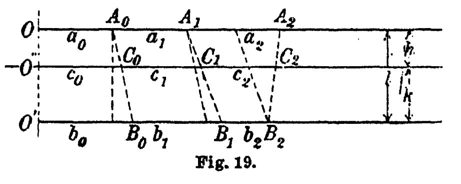


Fig. 19.

$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

und es läßt sich zeigen, daß diese für denselben Wert von x_1 und x_2 verschwindet, wie die zwei ersten linearen Funktionen. Der Abstand der beiden ersten Horizontalen sei l und der Abstand der dritten von der ersten und zweiten h und k. Dann ist leicht einzusehen, daß

$$c_0 = a_0 + \frac{h}{l}(b_0 - a_0) = \frac{k}{l}a_0 + \frac{h}{l}b_0.$$

Denn eine Parallele zu OO' durch den Punkt A_0 schneidet mit der Linie A_0B_0 auf der dritten und zweiten Horizontalen Strecken ab, deren Länge gleich $c_0 - a_0$ und $b_0 - a_0$ ist, und da diese Strecken zu einander in Verhältnis $\frac{h}{l}$ stehen, so folgt, daß

$$c_0 = a_0 + \frac{h}{l}(b_0 - a_0) = \frac{k}{l}a_0 + \frac{h}{l}b_0.$$

In derselben Weise kann man sich, indem man eine Parallele zu A_0B_0 durch A_1 und zu A_1B_1 durch A_2 oder B_2 (was auf dasselbe hinauskommt) zieht, überzeugen, daß

$$c_1 = a_1 + \frac{h}{l}(b_1 - a_1) = \frac{k}{l}a_1 + \frac{h}{l}b_2$$

und
$$c_2 = a_2 + \frac{h}{l}(b_2 - a_2) = \frac{k}{l}a_2 + \frac{h}{l}b_2.$$

Multipliziert man die Gleichung

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

mit $\frac{k}{l}$ und die Gleichung

$$b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

mit $\frac{h}{l}$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0.$$

Die dritte Horizontale braucht nicht notwendig zwischen den zwei ersten zu liegen. Wenn sie unter der zweiten liegt, so muß k, und wenn sie über der ersten liegt, h, einen negativen Wert erhalten, damit dieselben Ausdrücke für c_0, c_1, c_2 Geltung haben. Folglich bleibt der Schluß richtig, daß aus den zwei ersten Gleichungen die dritte gefolgert werden kann.

Da es uns nun vollkommen freisteht, die dritte Horizontale zu ziehen, wo immer es uns gefällt, können wir sie durch den Schnittpunkt der Linien A_1B_1 und A_2B_2 legen. Dann fallen die Punkte C_1 und C_2 zusammen und es verschwindet infolgedessen c_2. Wenn c_1 nicht verschwindet, können wir, wie oben gezeigt, x_1 und mit x_1 dann x_2 aus jeder der beiden ersten Horizontalen ermitteln. Im Falle c_1 auch verschwindet, das will sagen, im Falle die drei Geraden A_2B_2, A_1B_1 und A_0B_0 durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, der nicht auf OO' liegt, sind die zwei gegebenen Gleichungen nicht gleichzeitig zu befriedigen. Denn, wenn sie es wären, würde folgen daß

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

und, da c_1 und c_2 gleich Null sind, müßte auch $c_0 = 0$ sein, was der Annahme widerspricht, daß OO' nicht durch den Schnittpunkt von A_2B_2, A_1B_1 und A_0B_0 hindurchgeht. Wenn andererseits alle vier Geraden A_2B_2, A_1B_1, A_0B_0, OO' durch denselben Punkt hindurchgehen, dann verschwinden c_0, c_1 und c_2 alle drei. In diesem Falle widersprechen sich die zwei gegebenen Gleichungen nicht, aber $b_0 b_1 b_2$ sind $a_0 a_1 a_2$ proportional. Daher wird die zweite Gleichung dieselbe Beziehung zwischen x_1 und x_2 enthalten wie die erste, so daß nur eine Bedingung für x_1 und x_2 zu erfüllen ist. Wir können dann einem von beiden einen beliebigen Wert beilegen und den Wert des anderen so bestimmen, daß der Gleichung genügt ist.

In dem Falle zweier linearer Gleichungen mit einer beliebigen Zahl von unbekannten Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ kann man vermittelst derselben graphischen Methode eine der Größen eliminieren.

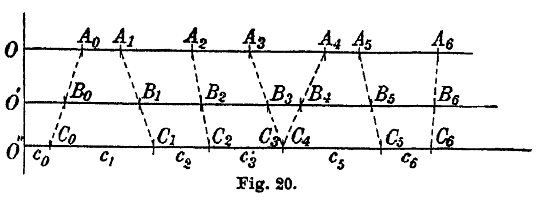


Fig. 20.

In Fig. 20 ist dies für den Fall von zwei linearen Gleichungen mit sechs unbekannten Größen gezeigt. Die zwei Horizontalen $OA_0A_1 A_2A_3A_4A_5A_6$ und $O'B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ stellen lineare Gleichungen dar. Durch den Schnittpunkt von A_3B_3 und A_4B_4 zieht man eine dritte Horizontale, welche die Linien OO', A_0B_0, $A_1B_1 \ldots A_6B_6$ in $O''C_0, C_1 \ldots C_6$ schneidet. Da C_3 und C_4 zusammenfallen, verschwindet die Strecke c_4 und x_4 wird eliminiert, so daß die Gleichung nunmehr die Form annimmt

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_5x_5 + c_6x_6 = 0.$$

Nun sei z. B. eine Reihe von sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten geometrisch auf sechs Horizontalen dargestellt. Von diesen behalten wir eine, aber an Stelle der anderen fünf konstruieren wir fünf neue, aus denen eine der Unbekannten vermittelst der ersten Gleichung eliminiert ist. Es kann nun vorkommen, daß gleichzeitig auch eine andere Unbekannte verschwindet; dann bleibt diese Größe willkürlich. Von den fünf neuen Gleichungen behalten wir wieder eine, die mindestens eine andere Unbekannte enthält, und ersetzen die vier übrigen durch vier neue Gleichungen, aus denen diese unbekannte Größe eliminiert ist. Indem man so fortfährt, wird in der Regel mit jedem Schritt nur eine Unbekannte eliminiert werden, so daß zuletzt eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt. An Stelle der gegebenen sechs Gleichungen, von denen jede sechs Unbekannte enthielt, haben wir nun eine Gleichung mit sechs, eine mit fünf usw. bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Die geometrische Konstruktion beweist, daß dieses System von Gleichungen dem gegebenen gleichwertig ist, denn wir können auf demselben Wege in umgekehrter Richtung zu dem gegebenen System zurückgelangen. Wir haben oben gesehen, wie die unbekannten Größen nun geometrisch konstruiert werden können. Es kann indessen vorkommen, daß mit der Elimination einer Unbekannten gleichzeitig auch eine zweite eliminiert wird. Dieser können wir dann einen beliebigen Wert beilegen, ohne die Möglichkeit der Lösung zu beeinträchtigen. Endlich können auch alle Unbekannte aus einer Gleichung eliminiert werden.

Wenn in diesem Falle ein von Null verschiedenes Glied übrig bleibt, so geht daraus hervor, daß es unmöglich ist, den gegebenen Gleichungen gleichzeitig zu genügen. Bleibt kein solches Glied übrig, dann enthalten die beiden Gleichungen aus denen die Elimination sich ergab, dieselbe Beziehung zwischen den Unbekannten und eine derselben darf fortgelassen werden.

§ 5. Graphische Behandlung komplexer Zahlen.

Eine komplexe Zahl $$z = x + yi$$
wird graphisch durch den Punkt Z dargestellt, dessen rechtwinklige Koordinaten den Zahlen x und y entsprechen. Wir nehmen an, daß beide Koordinaten in der gleichen Längeneinheit gemessen sind. Man könnte auch sagen, daß eine komplexe Zahl nichts ist als eine algebraische Form, die Koordinaten eines Punktes in der Ebene hinzuschreiben. Und die Rechnung mit komplexen Zahlen stellt gewisse geometrische Operationen mit den durch sie ausgedrückten Punkten dar.

Unter der Summe zweier komplexer Zahlen
$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{und} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$
versteht man die komplexe Zahl
$$z_3 = x_3 + y_3 i,$$
wo $$x_3 = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad y_3 = y_1 + y_2,$$
und man schreibt $$z_3 = z_1 + z_2.$$
Graphisch ermittelt man den Punkt P, welcher z_3 darstellt, aus den Punkten Z_1 und Z_2, welche z_1 und z_2 darstellen, indem man eine Parallele zu OZ_2 durch Z_1 legt und Z_1P (Fig. 21) an Länge und Richtung gleich OZ_2 macht, oder indem man eine Parallele durch Z_2 legt und Z_2P an Länge und Richtung OZ_1 gleich macht. Die Koordinaten von P sind offenbar gleich $x_1 + x_2$ und $y_1 + y_2$.

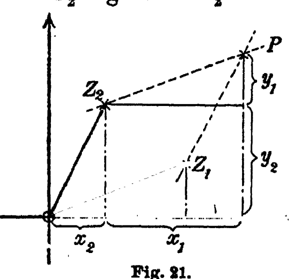


Fig. 21.

Zwei komplexe Zahlen z und z' nennt man entgegengesetzt, wenn ihre Summe Null ist.
$$z + z' = 0 \quad \text{oder} \quad x = -x'$$
$$\text{und} \quad y = -y' \quad \text{oder} \quad z = -z'.$$
Die betreffenden Punkte Z und Z' haben

denselben Abstand vom Nullpunkt, liegen aber in entgegengesetzter Richtung.

Die Differenz zweier komplexer Zahlen ist diejenige komplexe Zahl, welche zum Subtrahendus hinzuaddiert den Minuendus ergibt,

$$z_2 + (z_1 - z_2) = z_1 .$$

Daher $$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i .$$

Dies kann man auch so schreiben

$$z_1 + z_2', \quad \text{wo} \quad z_2' = - z_2 = - x_2 - y_2 i .$$

Das heißt: die Subtraktion der komplexen Zahl z_2 von z_1 kann durch Addition der entgegengesetzten Zahl $-z_2$ ausgeführt werden. Um den der Zahl $z_1 - z_2$ entsprechenden Punkt geometrisch zu konstruieren, muß man eine Parallele zu OZ_2 durch Z_1 legen und von Z_1 in der Richtung von Z_2 nach O die Länge $Z_2 O$ abtragen. Oder man kann auch vom Nullpunkt aus eine Linie von gleicher Länge und Richtung wie $Z_2 Z_1$ ziehen. Auch diese wird zu dem Punkte Z führen, der die Differenz $z_1 - z_2$ darstellt.

Die Regeln für die Multiplikation und Division komplexer Zahlen lassen sich am besten durch Einführung von Polar-Koordinaten aussprechen. Es sei r die positive Zahl, die die Strecke OZ in derselben Längeneinheit ausdrückt in welcher x und y die Abszisse und Ordinate messen, so daß

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und φ der Winkel, den OZ mit der x-Achse einschließt, in der Richtung von der positiven x-Achse auf die positive y-Achse zu durch alle vier Quadranten gerechnet (Fig. 22). Dann haben wir

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

und $$z = x + yi = r(\cos \varphi + \sin \varphi i).$$

Wir nennen r den Modul und φ den Winkel von z. Der Winkel kann um irgendein vielfaches von 4 Rechten vergrößert oder vermindert werden, ohne z zu verändern, aber jede Änderung von r bedingt notwendig eine Veränderung von z.

Fig. 22.

Nach dem Moivreschen Lehrsatze kann man schreiben $z = re^{\varphi i}$.

Unter dem Produkt zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = r_1 e^{\varphi_1 i} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2 e^{\varphi_2 i}$$

versteht man diejenige komplexe Zahl z_3, deren Modul r_3 gleich dem Produkt der Moduln r_1 und r_2 und deren Winkel φ_3 gleich der Summe der Winkel φ_1 und φ_2 oder nur um ein Vielfaches von 4 Rechten davon verschieden ist,

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}.$$

Die Definition der Division folgt aus der Multiplikation. Der Quotient $\frac{z_1}{z_2}$ ist diejenige komplexe Zahl, welche mit z_2 multizipliert z_1 gibt. Daher muß das Produkt seines Modul mit dem Modul von z_2 gleich dem Modul von z_1 und die Summe seines Winkels und des Winkels von z_2 gleich dem Winkel von z_1 sein. Oder man kann auch sagen, daß der Modul des Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ gleich dem Quotienten der Moduln $\frac{z_1}{z_2}$ und sein Winkel gleich der Differenz der Winkel also gleich $\varphi_1 - \varphi_2$ ist. Eine etwaige Addition oder Subtraktion eines Vielfachen von 4 Rechten kann außer Betracht gelassen werden, da sie weder die komplexe Zahl noch den sie darstellenden Punkt beeinflußt.

Die der Multiplikation und Division komplexer Zahlen entsprechende geometrische Konstruktion läßt sich am besten durch Betrachtung zweier Quotienten von je zwei komplexen Zahlen, die dasselbe Resultat ergeben, darlegen. Schreiben wir

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$$

Die geometrische Bedeutung hiervon ist, daß

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} \quad \text{und} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 .$$

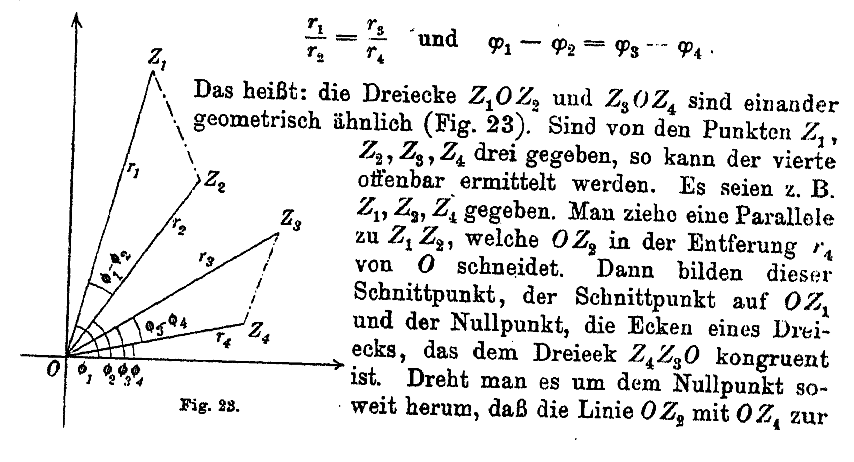


Fig. 23.

Das heißt: die Dreiecke $Z_1 O Z_2$ und $Z_3 O Z_4$ sind einander geometrisch ähnlich (Fig. 23). Sind von den Punkten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 drei gegeben, so kann der vierte offenbar ermittelt werden. Es seien z. B. Z_1, Z_2, Z_4 gegeben. Man ziehe eine Parallele zu $Z_1 Z_2$, welche $O Z_2$ in der Entferung r_4 von O schneidet. Dann bilden dieser Schnittpunkt, der Schnittpunkt auf $O Z_1$ und der Nullpunkt, die Ecken eines Dreiecks, das dem Dreieck $Z_4 Z_3 O$ kongruent ist. Dreht man es um dem Nullpunkt soweit herum, daß die Linie $O Z_2$ mit $O Z_4$ zur

Deckung kommt, so erhält man die Länge und Richtung der Seite OZ_3 und damit den gesuchten Punkt.

Diese Konstruktion enthält sowohl Multiplikation wie Division als besondere Fälle. Lassen wir Z_4 mit dem Punkte $x = 1$, $y = 0$ zusammenfallen, so daß $z_4 = 1$ (Fig. 24), dann haben wir

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \quad \text{oder} \quad z_1 = z_2 z_3 .$$

Aus zwei von den drei Punkten Z_1, Z_2, Z_3 läßt sich der jedesmalige dritte Punkt durch eine einfache Konstruktion bestimmen.

Die geometrische Darstellung komplexer Zahlen ist mit Vorteil anzuwenden, um die Eigenschaften harmonischer Schwingungen zu zeigen.

Fig. 24.

Nehmen wir an, daß ein Punkt P sich auf der x-Achse fortbewegt, so daß seine Abszisse im Zeitpunkt t durch den Ausdruck

$$x = r \cos (nt + \alpha)$$

gegeben ist, wo n, r und α Konstanten sind. Nennen wir r die Amplitude und $nt + \alpha$ die Phase der Bewegung. Der Punkt P bewegt sich zwischen den Grenzen $x = r$ und $x = -r$ hin und her. Die Zeit $T = \frac{2\pi}{n}$ nennt man die Schwingungsperiode, d. h. die Zeitdauer einer vollständigen Vor- und Rückwärtsbewegung.

Betrachten wir nun an Stelle von x die komplexe Zahl

$$z = r \cos (nt + \alpha) + r \sin (nt + \alpha) i$$

oder

$$z = r e^{(nt + \alpha) i},$$

deren Abszisse x ist, und verfolgen wir die Bewegung des Punktes Z. Für $t = 0$ haben wir

$$z = r e^{\alpha i}.$$

Bezeichnen wir diesen Wert mit z_0, so können wir schreiben

$$z = z_0 e^{nti}.$$

Die geometrische Bedeutung des Produktes $z_0 e^{nti}$ ist, daß die Strecke OZ_0 durch den Winkel nt um O gedreht wird. Denn, da der Modul von $e^{nti} = 1$ ist, so wird der Modul von z_0 durch die Multiplikation nicht verändert. Die Bewegung des Punktes Z besteht daher in einer gleichförmigen Drehung von OZ um O. In dem

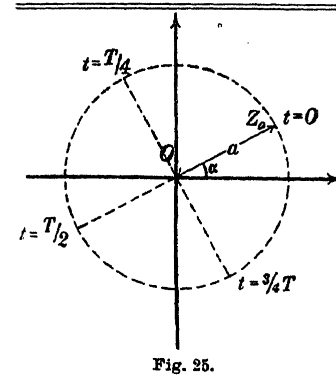


Fig. 25.

Zeitpunkt $t = 0$ haben wir die Lage OZ_0 und nach Ablauf der Zeit $T = \frac{2\pi}{n}$ wird dieselbe Lage wieder eingenommen. Die Umdrehung geschieht in der Richtung von der positiven x Achse auf die positive y Achse zu (Fig. 25).

Die Bewegung von Z ist offenbar einfacher als die Bewegung der Projektion P von Z auf die x-Achse.

Betrachten wir eine Bewegung, die aus der Summe zweier harmonischer Bewegungen von gleicher Periode aber verschiedenen Amplituden und Phasen entsteht,

$$x = r_1 \cos(nt + \alpha_1) + r_2 \cos(nt + \alpha_2)$$

und zwar indem wir sie wieder durch die Bewegung eines Punktes Z ersetzen, der der komplexen Zahl

$$z = r_1 e^{(nt+\alpha_1)i} + r_2 e^{(nt+\alpha_2)i}$$

entspricht. Für $t = 0$ ist das erste Glied

$$z_1 = r_1 e^{\alpha_1 i} \qquad \text{und das zweite} \qquad z_2 = r_2 e^{\alpha_2 i}.$$

Setzen wir z_1 und z_2 in den Ausdruck für z ein, so haben wir

$$z = z_1 e^{nti} + z_2 e^{nti} = (z_1 + z_2) e^{nti} = z_3 e^{nti},$$

wo

$$z_3 = z_1 + z_2 .$$

Dies zeigt auf den ersten Blick, daß die Bewegung von Z eine gleichmäßig kreisförmige ist, die in einer gleichförmigen Drehung von OZ um O besteht. Im Zeitpunkt $t = 0$ ist die Lage OZ_3, die der komplexen Zahl

$$z_3 = z_1 + z_2$$

entspricht. Die Projektion von Z auf die x-Achse hat die Abszisse

$$x = r_3 \cos(nt + \alpha_3),$$

wo r_3 und α_3 den Modul und den Winkel von z_3 bezeichnen. So ist gezeigt, daß die Summe zweier harmonischer Bewegungen gleicher Periode wieder eine harmonische Bewegung ergibt.

Dasselbe gilt für die Summe beliebig vieler harmonischer Bewegungen von gleicher Periode. Denn die komplexe Zahl

$$z = r_1 e^{(nt+\alpha_1)i} + r_2 e^{(nt+\alpha_2)i} + \cdots + r_\lambda e^{(nt+\alpha_\lambda)i}$$

wo $r_1, r_2, \cdots r_\lambda$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\lambda$ und n Konstanten sind, kann auch so geschrieben werden

$$z = z_1 e^{nti} + z_2 e^{nti} + \cdots + z_\lambda e^{nti}, \qquad \text{oder} \quad z = z_0 e^{nti},$$

wo
$$z_0 = z_1 + z_2 + \cdots + z_\lambda.$$

Die Bewegung von Z besteht daher, ausgenommen im Falle $z_0 = 0$, in einer gleichförmigen Umdrehung von OZ um O, wobei OZ immer dieselbe Länge, gleich dem Modul von z_0 beibehält. Die Lage von OZ im Zeitpunkt $t = 0$ ist OZ_0.

Die Bewegung eines Punktes P, dessen Abszisse

$$x = ae^{-kt}\cos(nt + \alpha),$$

wo a, k, n, α Konstanten sind (a und k positiv), nennt man eine gedämpfte harmonische Bewegung. Sie kann als eine harmonische Bewegung, deren Amplitude im Abnehmen ist, aufgefaßt werden. Um diese Bewegung zn studieren, substituieren wir wieder eine komplexe Zahl
$$z = ae^{-kt}\cos(nt + \alpha) + ae^{-kt}\sin(nt + \alpha)i,$$
$$\text{oder} \quad z = ae^{-kt} \cdot e^{(nt+\alpha)i} \quad \text{oder} \quad z = z_0 e^{-kt} \cdot e^{nti},$$

wo z_0 für die komplexe Konstante $ae^{\alpha i}$ geschrieben ist.

Das Produkt
$$z_0 e^{-kt}$$

ist eine komplexe Zahl, die einem Punkte Z_1 entspricht, welcher auf demselben Radius mit Z_0 liegt und in dem Zeitpunkt $t = 0$ mit Z_0 zusammenfällt, dann aber sich dem Nullpunkt O in geometrischer Progression nähert. In der Zeiteinheit nimmt die Entfernung zwischen Z_1 und O in dem konstanten Verhältnis $e^{-k} : 1$ ab. Die Multiplikation mit e^{nti} dreht OZ_1 durch einen Winkel nt um O. Wir können also die Bewegung von Z beschreiben als eine gleichförmige Drehung von OZ um O, während welcher Z sich O in dem Sinne gleichmäßig nähert, daß in gleichen Zeitabschnitten die Entfernung im gleichen Verhältnis abnimmt (Fig. 26). Im Augenblick $t = 0$ fällt die Lage von Z mit Z_0 zusammen. Als eine Periode dieser Bewegung bezeichnen

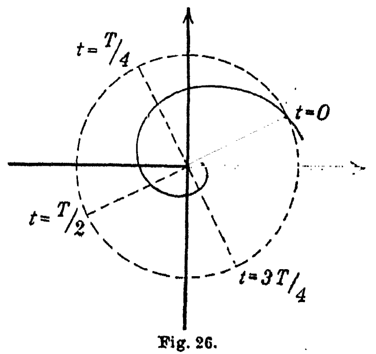


Fig. 26.

wir den Zeitabschnitt $T = \frac{2\pi}{n}$, in welchem OZ eine vollständige

Drehung um O ausführt, obgleich Z nicht in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Jedes von Z in einem gegebenen Zeitabschnitt durchlaufene Stück der Spirale ist jedem anderen in einem gleichen Zeitabschnitt durchlaufenen geometrisch ähnlich. Denn gesetzt, daß der zweite Zeitabschnitt τ Zeiteinheiten später anfängt als der erste, so haben wir für den ersten

$$z = z_0 e^{-kt} \cdot e^{nti}, \quad \text{und für den zweiten} \quad z' = z_0 e^{-k(t+\tau)} \cdot e^{n(t+\tau)i}.$$

Sind nun z_1 und z_2 die Werte von z an zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 des ersten Zeitabschnitts, und z'_1 und z'_2 die entsprechenden Werte von z' an zwei Zeitpunkten $t_1 + \tau$ und $t_2 + \tau$ des zweiten Zeitabschnitts, so haben wir

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{-k(t_1 - t_2)} \cdot e^{n(t_1 - t_2)i} = \frac{z'_1}{z'_2}.$$

Daher ist das Dreieck $Z_1 O Z_2$ dem Dreieck $Z'_1 O Z'_2$ geometrisch ähnlich. Da Z_1 und Z_2 mit beliebigen Punkten des ersten Teils der Kurve zusammenfallen können, so sind die beiden Kurvenstücke offenbar einander geometrisch ähnlich.

Die Projektion von Z auf der x Achse führt Schwingungen von abnehmender Amplitude aus. Die Umkehrpunkte entsprechen den Punkten der von Z beschriebenen Spirale, wo ihre Tangente der y-Achse parallel ist, d. h. wo die Abszisse von $\frac{dz}{dt}$ verschwindet.

Nun ist $\frac{dz}{dt} = z_0(-k + ni)\, e^{-kt} e^{nti} = (-k + ni)\, z$

oder
$$\frac{\frac{dz}{dt}}{z} = -k + ni = \varrho e^{i\lambda},$$

wo ϱ und λ Modul und Winkel der komplexen Zahl $-k + ni$ bezeichnen.

Folglich wird, wenn wir $\frac{dz}{dt}$ durch einen Punkt Z' darstellen, das Dreieck $Z'OZ$ sich selbst geometrisch ähnlich bleiben. Die Umkehrpunkte der gedämpften Schwingungen entsprechen den Zeitpunkten, in denen OZ' senkrecht nach oben oder unten gerichtet ist, oder der Winkel von $\frac{dz}{dt}$ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ ist. Der Winkel von z wird dann gleich $\frac{\pi}{2} - \lambda$ oder $\frac{3\pi}{2} - \lambda$ plus oder minus einem Vielfachen von 2π sein. Da andererseits der Winkel von z sich mit der Zeit nach der Formel

$$nt + \alpha$$

verändert, finden wir die Zeitpunkte, wo die Bewegung umkehrt, durch die Gleichung

$$nt + \alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda + 2N\pi, \quad \text{oder} \quad nt + \alpha = \frac{3\pi}{2} - \lambda + 2N\pi,$$

wo N eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrungen ist daher gleich $\frac{\pi}{n}$, d. h. gleich einer halben Periode. Alle die Punkte Z, die den Umkehrpunkten der Bewegung entsprechen, liegen auf einer und derselben Geraden, die durch den Nullpunkt O hindurchgeht, und mit der positiven x-Achse einen Winkel $\frac{\pi}{2} - \lambda$ bildet. Die Amplituden der aufeinander folgenden Schwingungen nehmen daher im gleichen Verhältnisse ab wie der Modul von z, d. h. während einer halben Periode im Verhältnis $e^{\frac{-k\pi}{n}}$ zu 1.

Betrachten wir die Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad, auf welches eine als harmonische Funktion der Zeit veränderliche Kraft wirkt, und beschränken wir unsere Betrachtung auf die Lagen in unmittelbarer Nähe der Lage des stabilen Gleichgewichts. Wenn die Größe x die Lage des Systems bestimmt, genügen seine Schwingungen einer Differentialgleichung von der Form

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + n^2x = F\cos(pt)$$ [1]

wo m, k, n, p, F positive Konstanten sind.

Dies ist wieder ein Fall, in welchem die Einführung einer komplexen Veränderlichen

$$z = x + yi$$

und die geometrische Darstellung komplexer Zahlen dienlich sind, um die Lösung zu gewinnen und einen Überblick über die verschiedenen Erscheinungen, die sich ergeben können, zu gewähren.

Um z einzuführen, betrachten wir zugleich die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} + n^2y = F\sin pt,$$

multiplizieren die zweite Gleichung mit i und addieren sie und die erste. Wir haben dann

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + k\frac{dz}{dt} + n^2z = Fe^{pti}.$$

Die Bewegung des die komplexe Zahl z darstellenden Punktes Z dient

1) Siehe z. B. Rayleigh, Theory of Sound, Vol. I, Kap. III, § 46.

dann zugleich, um die Bewegung von x zu zeigen. Wir brauchen nur die Projektion von Z auf die x-Achse zu betrachten.

Eine Lösung der Differentialgleichung erhält man, indem man

$$z = z_0 e^{pti}$$

schreibt. Führen wir diesen Ausdruck für z ein, und streichen den Faktor e^{pti}, so haben wir

$$z_0(-mp^2 + kpi + n^2) = F, \quad \text{oder} \quad z_0 = \frac{F}{-mp^2 + kpi + n^2}.$$

z_0 ist eine komplexe Konstante, die, wie wir später sehen werden, sehr einfach geometrisch dargestellt werden kann.

Diese Lösung
$$z = z_0 e^{pti}$$
ist nicht die allgemeine. Wenn wir mit z' irgend eine andere Lösung bezeichnen, so daß

$$m\frac{d^2 z'}{dt^2} + k\frac{dz'}{dt} + n^2 z' = Fe^{pti},$$

so finden wir durch Subtraktion der Gleichungen

$$m\frac{d^2(z'-z)}{dt^2} + k\frac{d(z'-z)}{dt} + n^2(z'-z) = 0$$

oder, wenn wir $z' - z = u$ schreiben,

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + k\frac{du}{dt} + n^2u = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$u = u_1 e^{\lambda_1 t} + u_2 e^{\lambda_2 t},$$

wo u_1 und u_2 beliebige Konstanten und λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung für λ sind
$$m\lambda^2 + k\lambda + n^2 = 0$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{n^2}{m}}.$$

Wenn $\frac{k^2}{4m^2}$ größer ist als $\frac{n^2}{m}$, so daß die Quadratwurzel einen reellen Wert hat, wird $\sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{n^2}{m}}$ jedenfalls kleiner als $\frac{k}{2m}$ sein. Daher werden λ_1 und λ_2 beide negativ und die Moduln der komplexen Zahlen $u_1 e^{\lambda_1 t}$ und $u_2 e^{\lambda_2 t}$ werden mit der Zeit verschwindend klein werden. Wenn andererseits $\frac{k^2}{4m^2}$ kleiner ist als $\frac{n^2}{m}$, dann entsprechen die komplexen Zahlen $u_1 e^{\lambda_1 t}$ und $u_2 e^{\lambda_2 t}$ beiden Punkten, welche Spiralen beschreiben, die sich, wie wir oben gesehen haben, dem Null-

punkt in einem für gleiche Zeitabschnitte konstanten Verhältnis nähern. Daher werden sie auch mit der Zeit verschwindend klein werden.

Nach Verlauf einer gewissen Zeit wird daher der Ausdruck

$$z = z_0 e^{pti}$$

genügen, die Lösung auszudrücken.

Der Punkt Z bewegt sich gleichmäßig um O auf einem Kreise, dessen Radius gleich dem Modul von z_0 ist, und vollendet einen Umlauf in der Periode $\frac{2\pi}{p}$, der Periode der auf das System wirkenden Kraft. Die Bewegung der Projektion von Z auf die x-Achse ist durch den Ausdruck

$$x = r_0 \cos(pt + \alpha)$$

gegeben, wo r_0 der Modul und α der Winkel von z_0 sind Es ist eine harmonische Bewegung mit der gleichen Periode, wie die der Kraft, aber mit einer gewissen Phasendifferenz und Amplitude, die von den Werten F, m, k, n, p abhängig sind.

Diese Beziehung zu studieren ist wichtig, um von den Erscheinungen, die sich ergeben können, eine Vorstellung zu gewinnen. Zu diesem Zwecke eignet sich besonders die geometrische Darstellung komplexer Zahlen.

Betrachten wir in dem Ausdruck für z_0

$$z_0 = \frac{F}{-mp^2 + kpi + n^2} \quad \text{den Nenner} \quad -mp^2 + kpi + n^2$$

und nehmen wir an, daß die Periode der auf das System wirkenden Kraft nicht bestimmt sei, während die Konstanten des Systems m, k, n und die Amplitude der Kraft F gegebene Werte haben. Die Größe p ist die Zahl der von der Kraft während der Dauer von 2π Zeiteinheiten ausgeführten Schwingungen. Diese Größe p sei unbestimmt, und es handle sich darum, zu zeigen, wie sich für verschiedene Werte von p die Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingungen zu der Amplitude und Phase der Kraft verhalten.

Tragen wir die Kurve der Punkte auf, die der komplexen Zahl

$$n^2 - mp^2 + kpi$$

entsprechen, wenn p die Werte $p = 0$ bis $+\infty$ annimmt.

Diese Kurve ist eine Parabel, deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt und deren Scheitelpunkt im Punkte $x = n^2$, $y = 0$ liegt. Ihre Gleichung kann man durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$x = n^2 - mp^2, \quad y = kp \quad \text{finden, nämlich} \quad x = n^2 - \frac{m}{k^2} y^2.$$

Aber es ist besser p nicht zu eliminieren und die verschiedenen Punkte für verschiedene Werte von p zu konstruieren. In Fig. 27 ist die Kurve für $p = 0$ bis $p = 3$ gezeichnet, und die Punkte $p = 0, 1, 2, 3$ sind bezeichnet. Die Ordinaten sind p proportional. Sie sind gleich $0, k, 2k, 3k$ für $p = 0, 1, 2, 3$. Der Abstand der Projektion eines beliebigen Punktes der Kurve auf die x-Achse vom Scheitelpunkt ist p^2 proportional. Er ist gleich $0, m, 4m\ 9m$ für $p = 0, 1, 2, 3$.

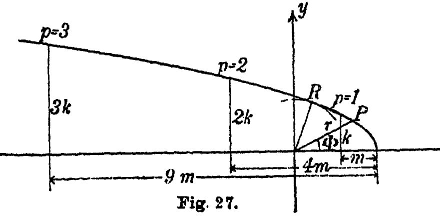


Fig. 27.

Bezeichnen wir für einen beliebigen Punkt P auf der Parabel die Entfernung vom Anfangspunkt mit r und den Winkel zwischen dem Radius und der positiven x-Achse mit φ, so daß

$$n^2 - mp^2 + kpi = re^{\varphi i}. \quad \text{Dann haben wir} \quad z_0 = \frac{F}{r} e^{-\varphi i}$$

und folglich $z = \frac{F}{r} e^{(pt-\varphi)i}$, und $x = \frac{F}{r} \cos(pt - \varphi)$.

Die Amplitude $\frac{F}{r}$ der erzwungenen Schwingungen ist r umgekehrt proportional. So zeigt unsere Figur 27, für welche Periode der Kraft die erzwungenen Schwingungen am größten werden, für die nämlich, die dem Punkte auf der Parabel entspricht, dessen Abstand vom Anfangspunkt am kleinsten ist. In Figur 27 ist der Punkt mit R bezeichnet. Man kann ihn den Punkt der größten Resonanz nennen. Sind die Konstanten des Systems derartig, daß die Ordinate des Punktes, in welchem die Parabel die y-Achse schneidet, im Verhältnis zu der Abszisse des Scheitelpunktes klein ist, dann wird OR nahezu mit der y-Achse zusammenfallen (Fig. 28). Der Winkel zwischen OR und der positiven x-Achse ist dann sehr nahe gleich 90^0, das will sagen, die erzwungenen Schwingungen größter Resonanz werden um etwas weniger als eine Viertel Periode hinter den Kraftschwingungen zurückbleiben. Bei unveränderten Werten von m und n wird dies für kleine Werte von k, d. h. bei einer schwachen Dämpfung, eintreten. Wenn p von der Schwingungszahl der größten Resonanz nur ein klein wenig abweicht, so entfernt sich der Punkt P von R so, daß r beträchtlich zunimmt und φ entweder sehr klein (für Werte von p, die kleiner sind als die Schwingungszahl der größten Resonanz) oder nahe gleich 180^0 wird (für Werte von p, die größer

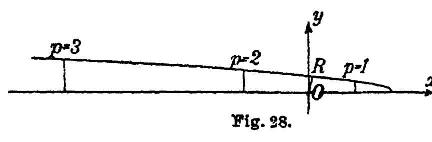


Fig. 28.

sind als die Schwingungszahl der größten Resonanz). Eine Abweichung der Periode der Kraft von der Periode der größten Resonanz wird die Amplitude der erzwungenen Schwingungen beträchtlich verringern. Zugleich wird das Zurückbleiben ihrer Phase hinter der Kraft beinahe verschwinden, wenn die Schwingungszahl der Kraft kleiner ist, oder sich auf fast eine halbe Periode belaufen, wenn die Schwingungszahl der Kraft größer ist. Für höhere Werte von k verbreitert sich die Parabel und diese Erscheinung tritt zurück. Das Minimum des Radius r wird weniger hervortreten. Der Winkel zwischen OR und der x-Achse wird kleiner und kleiner und für einen gewissen Wert von k und alle höheren fällt der Punkt R mit dem Scheitelpunkt der Parabel zusammen. In diesem Falle gibt es keine Resonanz; sondern wenn die Periode der Kraft unbegrenzt zunimmt (p also kleiner und kleiner wird), nimmt die Amplitude der erzwungenen Schwingungen zu und nähert sich dem Grenzwert $\frac{F}{n^2}$, ohne daß es eine bestimmte Periode gibt, für welche die erzwungenen Schwingungen stärker sind als für alle anderen.

Zweites Kapitel.

Graphische Darstellung der Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Veränderlichen.

§ 6. Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

Eine Funktion y einer Veränderlichen x

$$y = f(x)$$

wird geometrisch gewöhnlich durch eine Kurve dargestellt in der Weise, daß die rechtwinkligen Koordinaten ihrer sämtlichen Punkte, in irgendwie gewählten Längeneinheiten gemessen, gleich x und y sind. Diese graphische Darstellung einer Funktion ist ungemein wertvoll. Aber es gibt noch eine andere für gewisse Zwecke nicht weniger wertvolle Art der graphischen Darstellung, die in der angewandten Mathematik mehr als in der reinen gebräuchlich ist, und auf diese wollen wir hier unsere Aufmerksamkeit richten.

Fig. 29.

Nehmen wir an, daß die Werte von y für gewisse äquidistante Werte von x, z. B.

$x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6,$ berechnet seien. Wir bringen nun auf einer Seite einer Geraden eine gleichmäßige Skala für y an; auf der andern Seite der Geraden markieren wir durch Teilstriche diejenigen Punkte dieser Skala, deren y-Werte zu den oben angegebenen äquidistanten x-Werten gehören, und schreiben die betreffenden x-Werte daran (Fig. 29). Diese Zeichnung gestattet uns den Wert von y für die bezeichneten x-Werte abzulesen mit einer Genauigkeit, die von der Größe des Maßstabes, der Zahl seiner Teilstriche und natürlich von der Feinheit der Zeichnung abhängt. Sie ermöglicht uns auch die Werte von y für einen Wert von x, der zwischen den bezeichneten liegt, abzulesen, wenn die Abstände zwischen zwei aufeinander folgenden Werten von x so klein sind, daß die entsprechenden Abstände von y einander beinahe gleich sind. Man kann nach dem Augenmaß Werte von x mit einer gewissen Genauigkeit interpolieren. Man kann andererseits auch die Werte von x für beliebige Werte von y ablesen. Wir wollen dies die Darstellung einer Funktion durch eine Skala nennen.

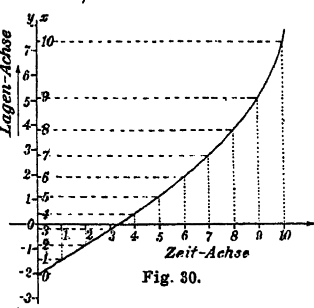


Fig. 30.

Man kann von dieser Darstellung leicht zur Darstellung derselben Funktion durch eine Kurve übergehen, indem man durch die mit den Werten von x bezeichneten Punkte Gerade im rechten Winkel zu der die Skala tragenden Geraden legt, und auf diesen die ihnen entsprechenden x-Zahlen, in einer beliebigen Längeneinheit gemessen, abträgt (Fig. 30).

Auf gleiche Weise kann man von der Darstellung der Funktion durch eine Kurve zu der durch eine Skala übergehen.

Die Darstellung durch eine Skala stellt, so kann man es ansehen, die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden dar, wo die Werte von x die Zeit bedeuten, und die mit diesen Werten bezeichneten Punkte die Lage des sich bewegenden Punktes in dem jedesmaligen Zeitpunkt. Durch den Übergang zur Kurve wird die Bewegung in der Geraden in eine Kurve ausgezogen, deren Abszisse die Zeit bedeutet (Fig. 30).

Die Darstellung durch eine Skala wird mit der durch eine Kurve kombiniert verwendet, um die Funktion einer Funktion graphisch darzustellen.

Sei y eine Funktion von x und x eine Funktion von t. Wir wollen nun y als Funktion von t ausdrücken:

Sei $y = f(x)$ durch eine Kurve in der gewöhnlichen Art gegeben, und $x = \varphi(t)$ durch eine Skala auf der x-Achse, welche die Punkte angibt, wo $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$. Man findet nun die Werte von y, die den Werten $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$ entsprechen, indem man die Ordinaten der Kurve $y = f(x)$ für die den Werten $t = 0, 1, 2, \ldots, 12$ entsprechenden Abszissen zeichnet. Diese Ordinaten werden in der

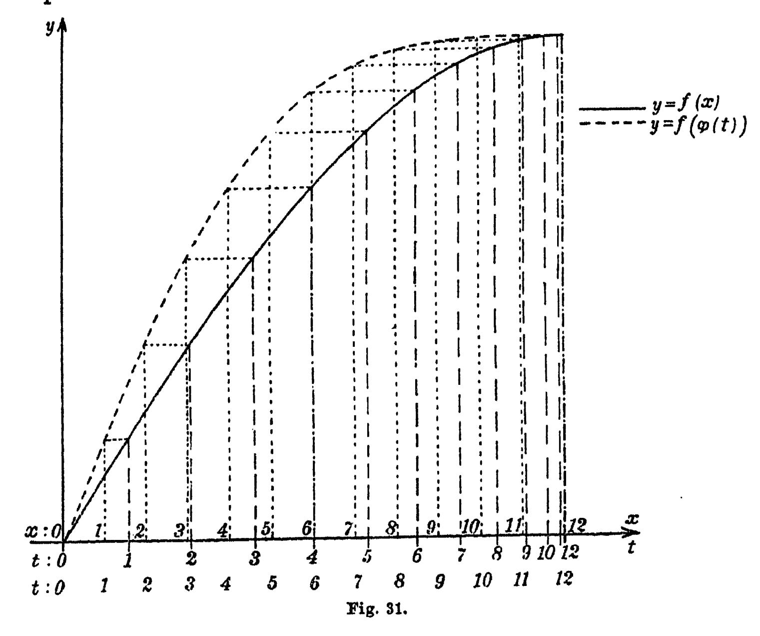


Fig. 31.

Regel nicht gleiche Abstände haben. Sobald wir sie aber so verschieben, daß sie äquidistant werden, bilden sie die Ordinaten der Kurve

$$y = f(\varphi(t))$$

mit t als Abszisse (Fig. 31).

Die Darstellung einer Funktion durch eine Skala läßt sich in der Hinsicht verallgemeinern, daß keine von den beiden Skalen auf beiden Seiten der Geraden notwendig gleichmäßig zu sein braucht. Die Länge der Teilstrecken kann sich auf beiden Seiten von einem Ende der Skala zum andern verändern. Wenn die Veränderung langsam genug ist, kann trotzdem mit Genauigkeit interpoliert werden. Man kann diesen Fall als eine Zusammensetzung zweier Fälle der ersten Art betrachten.




$$f(x) = y \text{ und } y = g(t).$$

Diese Skalen werden aneinander gelegt, so daß die Skala x die Skala t berührt,

$$f(x) = g(t),$$

während die Skala y als dazwischen herausgeschnitten gedacht wird (Fig. 32).

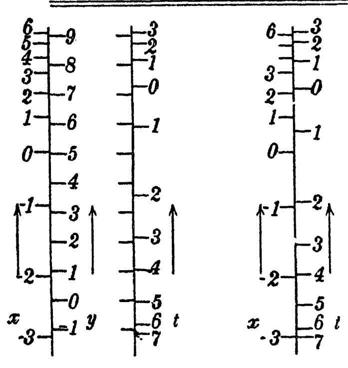


Fig. 32.

§ 7. Das Prinzip des Rechenschiebers.

Untersuchen wir, wie die Beziehung zwischen x und t durch die Verschiebung der x- und t-Skalen gegeneinander verändert wird.

Verschiebt man die x Skala um einen Betrag $y = c$, so daß ein Punkt der x-Skala, der einem Punkt y der y-Skala gegenüberstand, nunmehr dem Punkt $y + c$ gegenübersteht, dann wird die durch die neue Stellung der Skalen ausgedrückte Beziehung zwischen x und t durch die Gleichung

$$f(x) = g(t) + c$$

gegeben sein. Wenn x, t und x', t' zwei einander gegenüberstehende Wertepaare bezeichnen, haben wir gleichzeitig

$$f(x) = g(t) + c, \quad f(x') = g(t') + c,$$

oder durch die Elimination von c

$$f(x) - g(t) = f(x') - g(t').$$

Der gewöhnliche Rechenschieber trägt zwei identische Skalen $y = \log x$ und $y = \log t$, die gegeneinander verschoben werden können, auf denen x und t die Werte 1 bis 100 durchlaufen. Wir haben daher

$$\log x - \log t = \log x' - \log t', \quad \text{oder} \quad \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'}.$$

Fig. 33.

Das will sagen, daß in jeder beliebigen Stellung der x- und t-Skalen alle einander gegenüberstehenden Werte von x und t dasselbe Verhältnis (Fig. 33) haben. Dies ist das Prinzip, auf dem die Anwendung des Rechenschiebers beruht. Er setzt uns in den Stand, irgend eine der vier Größen x, t, x', t' zu berechnen, wenn die andern drei gegeben sind. Wenn z. B. x, t, x' bekannt sind, stellt man den

Schieber so, daß x dem t gegenüberliegt, und kann dann t' gegenüber dem x' ablesen. Auf seinen beiden anderen Rändern trägt der

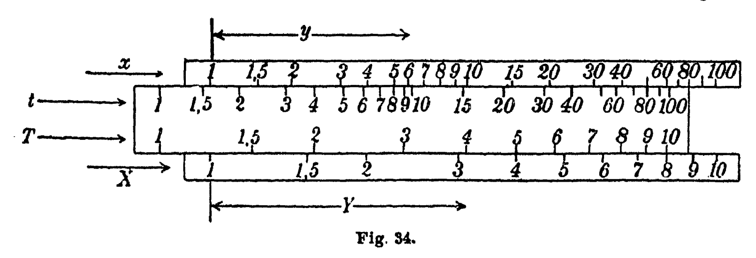


Fig. 34.

Rechenschieber zwei ähnliche Skalen, beide doppelt so groß wie die ersten (Fig. 34). Wir können schreiben

$$y = 2 \log X \quad \text{und} \quad y = 2 \log T.$$

Vermittelst eines kleinen Rahmens, der eine Querlinie trägt, und auf dem Instrument verschiebbar ist, dem „Läufer", kann man die Skalen x und T oder t und X miteinander vergleichen. Wenn z. B. für irgend eine Stellung des Instruments x, T und x', T' zwei einander gegenüberstehende Wertepaare sind, dann ist

$$\log x - 2 \log T = \log x' - 2 \log T' \quad \text{oder} \quad \frac{x}{T^2} = \frac{x'}{T'^2}.$$

Sind drei von den Größen x, T, x', T' bekannt, so kann die vierte abgelesen werden. So findet man den Wert

$$\frac{x T'^2}{T^2},$$

indem man T und x einander gegenüberstellt und den T' gegenüberliegenden Wert abliest.

Wir wollen jetzt den Teil des Instruments, der die Skalen t und

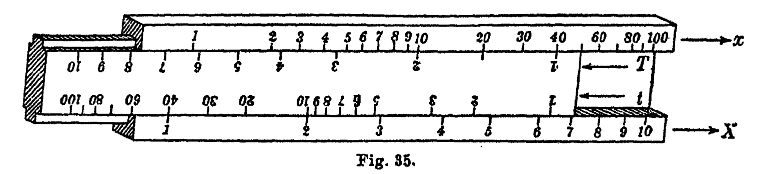


Fig. 35.

T trägt, umkehren, so daß die T-Skala an der x-Skala, und die t-Skala an der X-Skala entlang verschoben werden, aber in umgekehrter Richtung wie vorher (Fig. 35).

Dann können die Skalen t, T durch

$$y = 2 - \log t \quad \text{und} \quad y = 2 - 2 \log T,$$

ausgedrückt werden.

Stellt man das Instrument beliebig ein und betrachtet die Skalen x und t, oder X und T mit Hilfe der Querlinie, so hat man

$$\log x + \log t = \log x' + \log t' \quad \text{und} \quad \log X + \log T = \log X' + \log T'$$

oder
$$xt = x't' \quad \text{und} \quad XT = X'T',$$

so daß je zwei einander gegenüberliegende Werte dasselbe Produkt ergeben.

Für x und T haben wir

$$\log x + 2 \log T = \log x' + 2 \log T', \quad \text{oder} \quad xT^2 = x'T'^2.$$

Wenden wir dies an, um die Wurzel einer Gleichung von der Form

$$u^3 + au = b$$

zu finden. Man dividiere durch u, so daß

$$u^2 + a = \frac{b}{u}$$

und bringt $T = 1$ gegenüber $X = b$. Schiebt man dann den Läufer auf $T = u$, so findet man auf derselben Querlinie $t = u^2$ und $X = \frac{b}{u}$, so daß man die zwei Werte u^2 und $\frac{b}{u}$ einander gegenüber auf den Skalen t und X abliest. Ist $\frac{b}{u}$ positiv, so nimmt es ab, während u^2 zunimmt. Man durchläuft nun mit dem Auge die Skala bis wo die Differenz $\frac{b}{u} - u^2 = a$ ist. Hat man die Stelle gefunden, so zeigt die T-Skala die Wurzel der Gleichung. Man nehme z. B.

$$u^3 - 5u = 3, \quad \text{oder} \quad u^2 - 5 = \frac{3}{u}.$$

Fig. 36

Man stellt $T = 1$ gegenüber $X = 3$ und durchläuft mit dem Auge die Skalen X und t (Fig. 36) bis zu dem Punkte wo $t - 5 = X$. Er findet sich annäherungsweise bei $t = 6{,}2$, und nun liest man auf

der T-Skala $T = 2{,}50$ als Näherungswert der Wurzel der Gleichung ab. Dies ist die einzige positive Wurzel. Aber für eine negative Wurzel ist $\frac{3}{u}$ negativ und müßte daher der positive Wert von $\frac{3}{u}$ plus dem Werte von u^2 gleich 5 sein. Wir suchen der Skala entlang und finden $X = 1{,}63$ gegenüber $t = 3{,}37$, $T = 1{,}84$ annähernd entsprechend. Also ist $-1{,}84$ eine andere Wurzel. Da der Koeffizient von u^2 in der ersten Form der Gleichungen verschwindet, so folgt, daß die Summe der drei Wurzeln gleich Null sein muß. Danach wäre die dritte Wurzel negativ und angenähert gleich $-0{,}66$. Um festzustellen, daß dies stimmt, schiebt man das Instrument um, faßt den Wert $T = 10$ am anderen Ende der Skala ins Auge und bringt diese Stelle in dieselbe Stellung, die vorher das Ende $T = 1$ einnahm. Durchläuft man nun die X- und t-Skalen mit dem Auge, so findet man $t = 0{,}43$ gegenüber $X = 4{,}57$, so daß $X + t = 5{,}00$. Auf der T-Skala lesen wir 0,655, womit sich für die dritte Wurzel der Wert $-0{,}655$ ergibt.

Ist b negativ, dann ist immer eine und nur eine negative Wurzel vorhanden. Denn, wenn u die Werte $u = 0$ bis $-\infty$ durchläuft, durchläuft $u^2 - \frac{b}{u}$ die Werte $-\infty$ bis $+\infty$ ohne umzuwenden. Ist b positiv, dann gibt es immer eine und nur eine positive Wurzel; denn dann läuft $u^2 - \frac{b}{u}$ von $-\infty$ zu $+\infty$ für $u = 0$ bis $+\infty$. Im ersten Falle kann es zwei positive Wurzeln oder keine geben; im zweiten zwei negative oder keine. Für positive Werte von a existiert in beiden Fällen nur eine Wurzel. Dies erkennt man leicht an der ersten Form der Gleichung $u^3 + au = b$,

denn, wenn a einen positiven Wert hat, so folgt, daß $u^3 + au$ für $u = -\infty$ bis $+\infty$, ohne umzuwenden, von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, und daher jeden gegebenen Wert nur einmal annehmen kann.

Um zu entscheiden, ob im Falle, wo a einen negativen Wert hat, drei Wurzeln oder nur eine existieren, schreiben wir

$$u^2 - \frac{b}{u} = -a.$$

Für negative Werte von b gilt es zu ermitteln, ob positive Wurzeln existieren. Für positive Werte von u hat die Funktion $u^2 - \frac{b}{u}$ ein Minimum, wo der Differentialquotient verschwindet, d. h. für

$$2u + \frac{b}{u^2} = 0 \quad \text{oder} \quad 2u^2 = -\frac{b}{u}$$

Wir wollen ein solches Instrument zur Berechnung der Vermehrung eines auf Zinseszins zu zwei Prozent und darüber ausgeliehenen Kapitals angeben. Wenn x der Zinsfuß und t die Zahl der Jahre ist, vermehrt sich das Kapital im Verhältnis

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^t.$$

Man kann offenbar ein Instrument bauen, für welches

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^t=\left(1+\frac{x'}{100}\right)^{t'}.$$

Denn, wenn wir zunächst den Logarithmus und dann den Logarithmus des Logarithmus nehmen, so bekommen wir

$$\log t+\log\log\left(1+\frac{x}{100}\right)=\log t'+\log\log\left(1+\frac{x'}{100}\right).$$

Wir brauchen nun nur für die x-Skala

$$y=+\log\log\left(1+\frac{x}{100}\right)-\log\log\left(1+\frac{2}{100}\right),$$

und für die t-Skala $\qquad y=\log n-\log t$

anzunehmen. Für $x=2$ haben wir $y=0$ und daher in der normalen Stellung des Instrumentes $t=n$. Am anderen Ende haben wir $t=1$ und daher $y=\log n$. Nehmen wir nun $n=100$ an, so daß $y=2$ für $t=1$. Wenn die Länge des Instrumentes etwa 24 cm betragen soll, muß die Längeneinheit der y-Skala 12 cm sein. In der normalen Stellung genügen die einander gegenüberliegenden Ablesungen von x, t, der Gleichung

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^t=\left(1+\frac{2}{100}\right)^{100}$$

Gegenüber $t=1$ lesen wir den Wert $x_1=624$ und dies ergibt

$$\left(1+\frac{2}{100}\right)^{100}=1+\frac{x_1}{100}=1+6{,}24=7{,}24.$$

Ein auf Zinseszins zu zwei Prozent angelegtes Kapital wächst in 100 Jahren in dem Verhältnis 7,24 : 1. Oder man kann auch sagen: die gegenüber $t=1$ abgelesene Zahl $x=624$ ist der Zuwachs eines Kapitals von 100 durch Zinseszins zu zwei Prozent in 100 Jahren. Dieselbe Einstellung des Instrumentes gibt die Zahl der Jahre an, in der das Kapital zu einem höheren Zinsfuß um den gleichen Betrag wächst. Denn alle einander gegenüberliegenden Werte x, t genügen der Gleichung

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^t = 7{,}24.$$

Für irgendeinen anderen gegebenen Zinsfuß x von mehr als zwei Prozent und eine beliebige andere gegebene Anzahl von Jahren t findet man den Zuwachs des Kapitals, indem man x und t einander gegenüber einstellt und die x-Skala gegenüber $t = 1$ abliest. Die einzige Einschränkung ist die, daß der Zuwachs nicht größer sein darf als 624, denn dann würde $t = 1$ über das Ende der x-Skala hinausrücken.

Das Instrument setzt uns also auch in den Stand für einen gegebenen Kapitalzuwachs die Zahl der Jahre zu finden, wenn der Zinsfuß gegeben ist, oder den Zinsfuß, wenn die Zahl der Jahre bekannt ist, mit der einzigen oben erwähnten Einschränkung.

Wir können unser Instrument darauf einrichten, noch größere Kapitalsvermehrungen einzubeziehen, indem wir für n einen höheren Wert wählen. $n = 1000$ z. B. wird für $t = 1$ $y = 3$ geben. Soll das Instrument keine größeren Abmessungen erhalten, so müssen die Skalen im Verhältnis $2:3$ verkleinert werden.

Betrachten wir ein anderes Beispiel

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{n} - \frac{1}{t}.$$

Bei normaler Stellung des Instruments entspricht der mit $x = \infty$ bezeichnete Teilstrich der Skala dem Werte $y = 0$ und steht $t = n$ gegenüber. Wenn wir am anderen Ende $t = \infty$ haben, entspricht die Länge des Instruments $y = \frac{1}{n}$. Wählen wir für n den Wert 0,1, so daß die Länge des Instruments $y = 10$ ist; das will sagen, die Längeneinheit der y-Skala beträgt ein Zehntel der Länge des Instruments. Für eine beliebige Einstellung haben wir

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{t'}.$$

Wenn der Teilstrich $x' = \infty$ gegenüber $t' = c$ ist, so erhalten wir

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{c}.$$

Das Instrument setzt uns also in den Stand irgend eine der drei Größen x, t, c abzulesen, wenn die beiden anderen gegeben sind, wobei die einzige Einschränkung ist, daß alle drei zwischen 0,1 und ∞ liegen müssen. Das Instrument kann dazu benutzt werden, den Gesamtwiderstand zweier parallel geschalteter elektrischer Widerstände

zu bestimmen; denn wenn jener mit R, diese mit R_1, R_2 bezeichnet werden, so genügen sie der Gleichung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}.$$

Ebenso kann es dienen, um die Entfernung eines Gegenstandes und seines Bildes von den Hauptebenen eines beliebigen gegebenen Systems von Linsen zu berechnen. Denn, wenn f die Brennweite und x und t die Entfernungen des Gegenstandes und seines Bildes von den entsprechenden Hauptebenen sind (Fig. 37), so ist die Gleichung

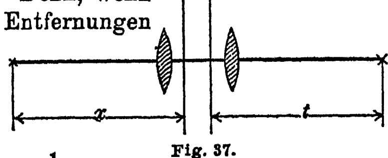


Fig. 37.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}.$$

Auf der Rückseite des Schiebers eines gewöhnlichen Rechenschiebers ist meistens eine Skala

$$y = 2 + \log \sin t$$

angebracht. Wenn man den Schieber umkehrt, so daß diese Skala der Skala $y = \log x$ verschieblich gegenüberliegt, so bekommt man für eine beliebige Einstellung

$$\log x - \log \sin t = \log x' - \log \sin t', \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\sin t} = \frac{x}{\sin t'}$$

für jede zwei Wertepaare x, t; x', t', die einander gegenüberliegen. Sind zwei Seiten eines Dreiecks und der der größeren gegenüber liegende Winkel gegeben, so liefert uns eine Einstellung des Instruments den der kleineren gegenüberliegenden Winkel, ebenso, wenn zwei Winkel und eine der gegenüberliegenden Seiten gegeben sind, die Länge der anderen Seite.

Wenn $x' = a$ der Wert gegenüber $t' = 90^0$ ist, haben wir

$$x = a \sin t.$$

So können wir die Lage einer beliebigen harmonischen Bewegung für jeden Phasenwert ablesen.

Ein Instrument, das die Skalen

$$y = \log \sin x \quad \text{und} \quad y = \log \sin t$$

trägt, setzt uns in den Stand jeden der vier Winkel x, t, x', t' für welche

$$\frac{\sin x}{\sin t} = \frac{\sin x'}{\sin t'}$$

zu finden, wenn die drei anderen gegeben sind. Wir können also,

wenn wir die Deklination, den Stundenwinkel und die Höhe eines Himmelskörpers kennen, auf dem Instrument das Azimut ablesen. Wir brauchen nur $x = 90^0$ — Höhe, t = Stundenwinkel, $x' = 90^0$ — Deklination zu setzen, dann ist t' = Azimut oder 180^0 — Azimut.

Es ist dabei nicht nötig die Gradzahlen 90^0 — Höhe und 90^0 — Deklination auszurechnen. Die Differenz kann auf der Skala abgezählt werden, indem man sich an Stelle von 90^0, 0^0 an der Stelle von 80^0, 10^0 usw. geschrieben denkt, und die Teilstriche der Skala rückwärts statt vorwärts zählt.

§ 8. Rechtwinklige Koordinaten mit ungleichmäßigen Skalen.

Die zwei Arten, die Beziehung zwischen zwei Veränderlichen auszudrücken, durch eine Kurve und durch Skalen, führen auf eine Kombination beider Methoden.

Angenommen, die rechtwinkligen Koordinaten von x und y seien Funktionen von u und v, der Art, daß

$$x = \varphi(u) \quad \text{und} \quad y = \psi(v).$$

Die Funktion $x = \varphi(u)$ wird durch eine gleichmäßige Skala für x auf der Abszissenachse dargestellt, die auf der anderen Seite eine ungleichmäßige Skala für u trägt; die Funktion $y = \psi(v)$ durch eine gleichmäßige Skala für y auf der Ordinatenachse, die auf der anderen Seite mit einer ungleichmäßigen Skala für v versehen wird. Durch die Teilstriche der u-Skala zieht man senkrechte und durch die Teilstriche der v-Skala wagerechte Linien. Diese beiden Systeme von Parallelen bilden ein Netzwerk von Rechtecken verschiedener Größe (Fig. 38), und eine beliebige Gleichung zwischen u und v kann durch eine Kurve in dieser Ebene ausgedrückt werden.

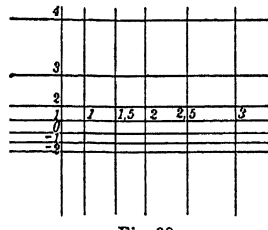


Fig. 38.

Die Zweckmäßigkeit dieser Methode wird man an ein paar Beispielen erkennen können. Sie ermöglicht es uns, die Form einer Kurve durch eine geschickte Wahl der Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ zu vereinfachen. Man kann z. B. leicht sehen, daß eine Kurve, die eine Gleichung $f(u,v) = 0$ ausdrückt, immer durch eine Gerade ersetzt werden kann, wenn man die u-Skala richtig bestimmt. Denn, wenn die Punkte der Kurve, denen $u = 1, 2, 3, 4, \ldots$ entspricht, nicht auf einer Geraden liegen, so rückt man sie auf eine Gerade, ohne ihre Ordinaten zu ändern (Fig. 39). Dies erfordert eine Änderung der u-Skala, aber es ändert nichts an der Gleichung $f(u, v) = 0$, die nun durch die Gerade ausgedrückt wird.

Angenommen wir wollten die Beziehung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

wo a und b gegebene Zahlen sind, darstellen. Wenn u und v gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten wären, würde die Kurve eine Ellipse sein. Machen wir aber

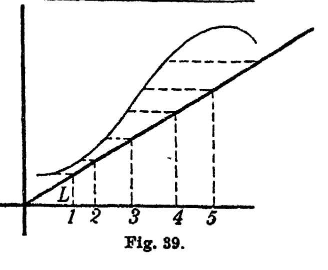


Fig. 39.

$$x = u^2 \quad \text{und} \quad y = v^2,$$

so wird die Gleichung der Linie in rechtwinkligen Koordinaten

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$$

und die Kurve wird somit in eine Gerade verwandelt, die einen Punkt auf der positiven x-Achse mit einem Punkt auf der positiven y-Achse verbindet. Der Punkt auf der x-Achse entspricht dem Werte $u = \pm a$ auf der u-Skala und der Punkt auf der y-Skala entspricht dem Werte $v = \pm b$ auf der v-Skala (Fig. 40).

Jeder Punkt auf der Geraden entspricht den vier Kombinationen $+u, +v; -u, +v; +u, -v; -u, -v$, weil x die gleichen Werte für entgegengesetzte Werte von u und y für entgegengesetzte Werte von v hat. Man kann v als eine Funktion von u, oder u als eine Funktion von v ablesen.

Wenn eine zweite Gleichung $\frac{u^2}{a_1^2} + \frac{v^2}{b_1^2} = 1$

gegeben ist, so finden wir die beiden Gleichungen gemeinsamen Lösungen durch den Schnittpunkt der beiden Geraden. Fig. 40 zeigt die Lösungen der zwei Gleichungen

$$\frac{u^2}{2^2} + \frac{v^2}{3^2} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{u^2}{4^2} + \frac{2^2 v^2}{5^2} = 1,$$

als näherungsweise gleich $u = \pm 1{,}2$, und $v = \pm 2{,}4$.

Ebenso läßt sich eine andere in der mathematischen Physik häufig vorkommende Funktion

$$v = a e^{-\frac{u^2}{m^2}}$$

durch denselben Kunstgriff vermittelst einer Geraden darstellen.

Fig. 40.

Macht man

$$y = \log v, \quad x = u^2,$$

so erhält man $$y = \log a - \frac{x}{m^2} \log e,$$

wo $\log a$ und $\log e$ die Logarithmen von a und e zu irgend einer Basis sind. Die u-Skala wird auf der x-Achse und die v-Skala auf der y-Achse abgetragen und die Punkte $u = 0$, $v = a$ und $u = m$, $v = \frac{a}{e}$ sollen verbunden werden. Der Punkt $v = \frac{a}{e}$ wird gefunden, indem man die Entfernung $v = 1$ bis $v = e$ von a abwärts abträgt (Fig. 41). Es ist nicht notwendig, daß x und y in gleichen Längeneinheiten gemessen werden.

Fig. 41.

Gesetzt nun, es sollen die Konstanten a und m aus zwei Gleichungen

$$v_1 = a e^{-\frac{u_1^2}{m^2}} \quad \text{und} \quad v_2 = a e^{-\frac{u_2^2}{m^2}}$$

gefunden werden. Unser Diagramm würde zwei Punkte liefern, die u_1, v_1 und u_2, v_2 entsprechen. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte schneidet die Ordinatenachse in $v = a$ und die Parallele zur Abszissenachse durch $v = \frac{a}{e}$ in $u = m$.

In der angewandten Mathematik kommt das Problem in der Regel in der Form vor, daß mehr als zwei Wertepaare u, v gegeben, aber alle mit Beobachtungsfehlern behaftet sind. Das richtige Verfahren ist dann, die entsprechenden Punkte aufzutragen und eine gerade Linie hindurchzulegen, die sich so gut wie möglich den Punkten anpaßt. Man kann sich mit Vorteil eines schwarzen Fadens bedienen, den man über die Zeichnung spannt, um so durch Ausprobieren die Gerade zu finden, die am nächsten an alle aufgetragenen Punkte herankommt (Fig. 42).

Ein anderer Fall ist der, daß die Veränderlichen u und v mit den rechtwinkligen Koordinaten x und y durch die Funktionen

$$x = \log u \quad \text{und} \quad y = \log v$$

verknüpft sind. Sogenanntes „logarithmisches Papier" mit paralleler Liniierung für äquidistante Werte von u und dazu rechtwinkliger Liniierung für äquidistante Werte von v ist im Handel erhältlich (Fig. 43).

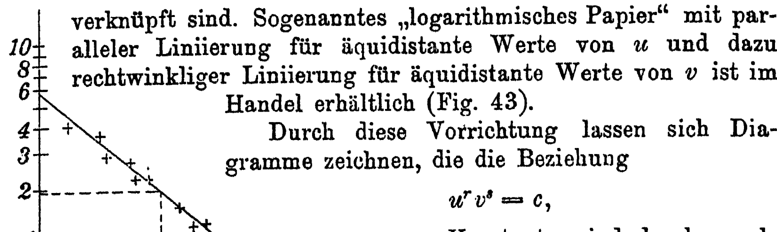


Fig. 42.

Durch diese Vorrichtung lassen sich Diagramme zeichnen, die die Beziehung

$$u^r v^s = c,$$

wo r, s, c Konstanten sind, durch gerade Linien wiedergeben. Denn, wenn man den Logarithmus nimmt, erhält man

$$rx + sy = \log c.$$

Die Gerade verbindet den Punkt $u = c^{\frac{1}{r}}$ auf der u-Skala mit dem Punkte $v = c^{\frac{1}{s}}$ auf der v-Skala.

Logarithmisches Papier kann ferner in allen den Fällen mit Vorteil benutzt werden, wo eine Reihe von Beziehungen zwischen den Veränderlichen u und v betrachtet werden, die sich nur dadurch unterscheiden, daß u und v in einem konstanten Verhältnis verändert werden. Wenn u und v als rechtwinklige Koordinaten aufgetragen würden, könnten die ihre verschiedenen Beziehungen zueinander darstellenden Kurven alle aus einer derselben erzeugt werden, indem man den Maßstab der Abszissen und unabhängig davon den Maßstab der Ordinaten veränderte, so daß alle diese Kurven ein sehr verschiedenartiges Aussehen erhalten würden. Schreiben wir als Gleichung einer Kurve

$$f(u, v) = 0,$$

dann können die Gleichungen aller übrigen in der Form

$$f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) = 0,$$

wo a, b positive Konstanten sind, geschrieben werden. Die Punkte u, v auf der ersten Kurve führen zu den Punkten auf einer der anderen Kurven, indem man u $a$mal so groß und v $b$mal so groß nimmt. Denn, wenn wir $u' = au$ und $v' = bv$ schreiben, so führt die Gleichung $f(u, v) = 0$ zu der Gleichung zwischen u' und v'

$$f\left(\frac{u'}{a}, \frac{v'}{b}\right) = 0.$$

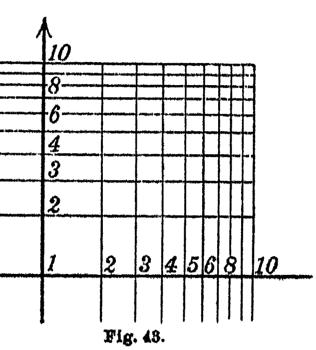


Fig. 43.

Durch die Anwendung logarithmischen Papiers wird das Diagramm aller dieser Kurven sehr vereinfacht. Die Gleichung $f(u, v) = 0$ ist einer gewissen Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ äquivalent, wo $x = \log u$, $y = \log v$. Nun seien x', y' die rechtwinkligen Koordinaten, die u', v' entsprechen, sodaß

$$x' = \log u' = \log u + \log a = x + \log a,$$
$$y' = \log v' = \log v + \log b = y + \log b.$$

Zu dem Punkte x', y' gelangt man vom Punkte x, y aus, indem man in der Richtung der x-Achse eine bestimmte Strecke $\log a$ und in der Richtung der y-Achse eine bestimmte Strecke $\log b$ abträgt. Auf logarithmischem Papier gezeichnet ist daher die ganze Kurve

$$f(u, v) = 0$$

kongruent mit allen Kurven $f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) = 0$.

Man kann sie mit jeder von diesen Kurven zusammenfallen lassen, indem man sie parallel zu sich selbst verschiebt.

§ 9. Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Wenn eine Funktion einer Veränderlichen $y = f(x)$ durch eine Kurve dargestellt wird, werden die Werte von x auf der x-Achse abgetragen und die Werte von y durch auf der x-Achse senkrechte Linien ausgedrückt. In ähnlicher Weise kann eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen

$$z = f(x, y)$$

dargestellt werden, indem x und y als rechtwinklige Koordinaten aufgetragen und senkrechte Linien, deren Längen z proportional gemacht werden, auf der xy-Ebene in allen den Punkten errichtet werden, wo $f(x, y)$ definiert ist. Auf diese Weise entspricht die Funktion einer Fläche im Raume. Nun hat es praktische Schwierigkeiten, Flächen im Raume herzustellen und es erscheint deshalb wünschenswert, andere Mittel anzuwenden, die es ermöglichen, Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher auf einer Ebene darzustellen. Dies kann auf folgende Weise geschehen.

Nimmt man x, y als rechtwinklige Koordinaten, so bilden alle Punkte, für welche $f(x, y)$ denselben Wert hat, eine Kurve in der xy-Ebene. Denken wir uns eine Anzahl dieser Kurven gezogen und mit den Werten von $f(x, y)$ bezeichnet. Wenn die verschiedenen

Werte von $f(x, y)$ dicht genug gewählt sind, sodaß die Kurven in dem von unserer Zeichnung umfaßten Teil der xy-Ebene hinreichend dicht liegen, sind wir nicht nur imstande, den Wert von $f(x, y)$ an irgend einem der Punkte auf einer der gezeichneten Kurven anzugeben, sondern wir können auch mit ziemlicher Genauigkeit den Wert von $f(x, y)$ an einem zwischen zwei von den Kurven gelegenen Punkte interpolieren. In der Regel wird es sich empfehlen, äquidistante Werte von $f(x, y)$ zu wählen, um die Interpolation der dazwischen liegenden Werte zu erleichtern. Die Kurven können als die senkrechte Projektion gewisser Kurven auf der Fläche im Raum, der Schnittlinien der Fläche mit äquidistanten zur xy-Ebene parallelen Ebenen, betrachtet werden.

Diese Methode ist die Verallgemeinerung der Skalendarstellung einer Funktion einer Veränderlichen. Denn die Darstellung einer Beziehung zwischen t und x durch eine Kurve, deren Ordinate x und deren Abszisse t ist, wird dadurch in die Darstellung durch eine Skala übergeführt, daß gewisse Punkte der Kurve, nämlich ihre Schnittpunkte mit äquidistanten Parallelen zur x-Achse, auf die x-Achse projiziert und mit den Werten von t bezeichnet werden. Die Kurven bei der Darstellung einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen sind den Skalenteilen bei der Darstellung einer Funktion von einer Veränderlichen analog.

Diese Methode, eine Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher oder, wie man auch sagen kann, eine Fläche im Raum, durch eine Zeichnung in der Ebene darzustellen, wird z. B. von Schiffbauern verwendet, um die Gestalt von Schiffen, und von Feldmessern, um die Gestalt der Erdoberfläche wiederzugeben. Wir wollen die Methode zur Lösung eines rein mathematischen Problems anwenden.

Die Gleichung

$$z^3 + pz + q = 0$$

definiert z als eine Funktion von p und q. Stellen wir diese Funktion dar, indem wir p und q als rechtwinklige Koordinaten nehmen und die Linien für äquidistante Werte von z ziehen.

Für jeden konstanten Wert von z haben wir eine lineare Gleichung zwischen den Veränderlichen p und q; diese ist also durch eine Gerade darstellbar. Diese Linie schneidet die Parallelen $p = 1$ und $p = -1$ in den Punkten $q = -z^3 - z$ und $q = -z^3 + z$. Berechnen wir diese Werte für $z = 0; \pm 0{,}1; \pm 0{,}2 \cdots \pm 1{,}3$ und zeichnen die diesen Werten entsprechenden Linien, soweit sie in einem die Werte $p = -1$ bis $+1$ nnd $q = -1$ bis $+1$ umfassenden Quadrat liegen. Fig. 44 zeigt das Ergebnis. Auf diesem Dia-

gramm können wir sofort die Wurzeln irgend einer Gleichung dritten Grades von der Form

$$z^3 + pz + q = 0$$

ablesen, wenn p und q innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegen. Für $p = 0{,}4$ und $q = -0{,}2$ z. B. lesen wir $z = 0{,}37$ ab, indem wir den Wert von z nach der Lage des Punktes zwischen den Geraden $z = 0{,}3$ und $z = 0{,}4$ interpolieren.

Wir erkennen auch, daß nur eine reelle Wurzel existiert, denn nur eine Gerade geht durch den Punkt hindurch. Auf der linken Seite des Quadrats ist ein dreieckig gestalteter Bereich, wo die Geraden einander schneiden. Jedem in diesem Bereich gelegenen Punkt entspricht eine Gleichung mit drei reellen Wurzeln, z. B. für den Punkt $p = -0{,}8$ und $q = +0{,}2$ lesen wir $z = -1{,}00$; $+0{,}28$; $+0{,}72$. Auf der oberen und unteren Grenze dieses Bereiches fallen jedes Mal zwei Wurzeln zusammen.

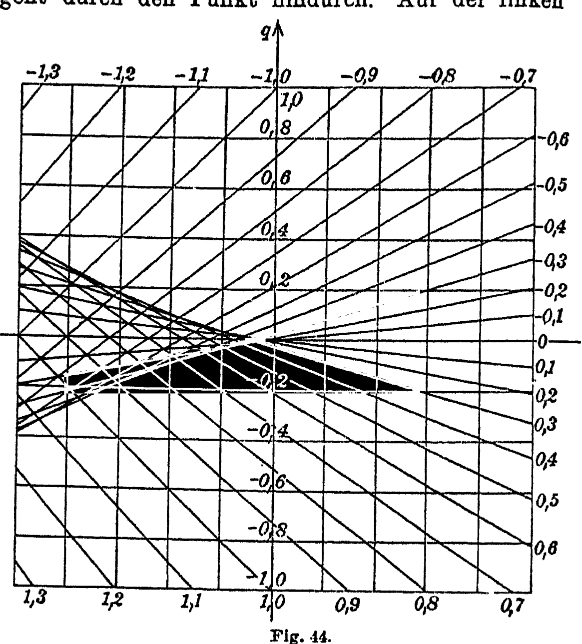


Fig. 44.

Auch für Werte von p und q außerhalb der Grenzen -1 und $+1$ kann das Diagramm benutzt werden. Wir brauchen nur $z' = \frac{z}{m}$ an Stelle von z einzuführen, und m hinreichend groß zu wählen. Statt

$$z^3 + pz + q = 0 \quad \text{erhalten wir} \quad m^3 z'^3 + pmz' + q = 0,$$

oder, wenn wir durch m^3 dividieren,

$$z'^3 + \frac{p}{m^2} z' + \frac{q}{m^3} = 0 \quad \text{oder} \quad z'^3 + p'z' + q' = 0,$$

wo

$$p' = \frac{p}{m^2} \quad q' = \frac{q}{m^3}.$$

Dadurch, daß man für m einen hinreichend hohen Wert wählt, kann man p' und q' zwischen die Grenzen -1 bis $+1$ rücken, sodaß die Wurzeln z' auf dem Diagramm abgelesen werden können. Diese geben mit m multipliziert die Wurzeln z der gegebenen Gleichung.

Eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen braucht nicht explizite ausgedrückt, sondern kann in der Form einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen

$$g(u, v, w) = 0$$

gegeben sein, von denen je zwei als unabhängig und die dritte als Funktion der beiden anderen angesehen werden können.

Die graphische Darstellung kann manchmal durch eine Modifikation der oben beschriebenen Methode erleichtert werden. Die Kurven für konstante Werte einer der drei Variabeln, sagen wir w, werden nicht mit u und v als rechtwinklichen Koordinaten aufgetragen, sondern erst nach Einführung neuer Veränderlicher x, einer Funktion von u, und y, einer Funktion von v, die man zu rechtwinkligen Koordinaten macht. In manchen Fällen kann es z. B. gelingen, durch richtige Wahl der Funktionen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(v)$ für die Kurven $w =$ const. gerade Linien zu bekommen. Dies wird offenbar der Fall sein, wenn die Gleichung $g(u, v, w) = 0$ in die Form gebracht werden kann

$$a(w)\varphi(u) + b(w)\psi(v) + c(w) = 0,$$

wo a, b, c beliebige Funktionen von w, φ eine beliebige Funktion von u und ψ eine beliebige Funktion von v sind. Denn durch Einführung von

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v),$$

wird die Gleichung

$$ax + by + c = 0,$$

wo a, b, c für einen beliebigen konstanten Wert von w Konstanten sind.

Als Beispiel wollen wir die Beziehung zwischen der wahren Sonnenzeit, der Höhe der Sonne über dem Horizont und der Deklination der Sonne für einen Ort, dessen Breite gegeben ist, betrachten. An Stelle der Deklination der Sonne könnten wir auch die Jahreszeit setzen, da die Jahreszeit die Deklination der Sonne bestimmt. Unsere Aufgabe ist es also, für einen Ort, dessen Breite gegeben ist, ein Diagramm zu zeichnen, auf dem für einen beliebigen Zeitpunkt und beliebige Sonnenhöhe die wahre Sonnenzeit abgelesen werden kann.

In dem von dem Zenit Z, dem Nordpol P (wenn der gegebene Ort auf der nördlichen Halbkugel angenommen wird) und der Sonne S gebildeten sphärischen Dreieck (Fig. 45) sind die Seiten die Komplemente der Deklination δ, der Höhe h und der Breite φ. Der Winkel t am Pol ist der Stundenwinkel der Sonne, welcher in Zeit ausgedrückt, die wahre Sonnenzeit gibt.

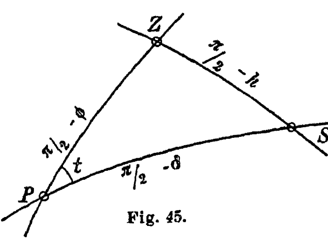


Fig. 45.

Die Gleichung zwischen diesen vier Größen kann nach der bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie in der Form

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

geschrieben werden. Die Breite φ soll konstant gehalten werden, so daß nur t, h, δ veränderlich sind.

Schreiben wir nun
$$x = \cos t, \quad y = \sin h,$$
sodaß die Gleichung die Form
$$y = \sin \varphi \sin \delta + x \cos \varphi \cos \delta \text{ annimmt.}$$

Wenn x und y als rechtwinklige Koordinaten aufgetragen werden, bekommen wir für jeden Wert von δ eine Gerade. Wir denken uns horizontale Gerade gezogen für äquidistante Werte von $h = 0$ bis $h = 90^0$ und vertikale für äquidistante Werte von $t = -180^0$ bis $t = +180^0$ oder, in Zeit ausgedrückt, von Mitternacht zu Mitternacht (Fig. 46). Um die Geraden $\delta =$ const. zu ziehen, berechnen wir die Punkte, wo sie die Senkrechten schneiden, welche $x = -1$ und $x = +1$, oder, in Zeit ausgedrückt, Mitternacht und Mittag entsprechen. Für $x = -1$ haben wir $y = -\cos(\varphi + \delta)$ und für $x = +1$ $y = \cos(\varphi - \delta)$. Bringen wir auf der Senkrechten $x = -1$ eine Skala mit den Teilpunkten $y = -\cos(\varphi + \delta)$ für äquidistante Werte von $(\varphi + \delta)$ an, und auf der Senkrechten $x = +1$ eine Skala mit den Teilpunkten $y = \cos(\varphi - \delta)$ für äquidistante Werte von $\varphi - \delta$. Die Skala ist dieselbe wie die Skala für h, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Werte von $(\varphi - \delta)$ die Komplemente von h und die Werte von $\varphi + \delta$ die Komplemente von $-h$ sind. Für eine Breite von 41^0 z. B. haben wir

für	δ	$\varphi + \delta$	$\varphi - \delta$
Juni 21	$23{,}5^0$	$64{,}5^0$	$17{,}5^0$
September 23 und März 21 .	0^0	41^0	41^0
Dezember 21	$-23{,}5^0$	$17{,}5^0$	$64{,}5^0$.

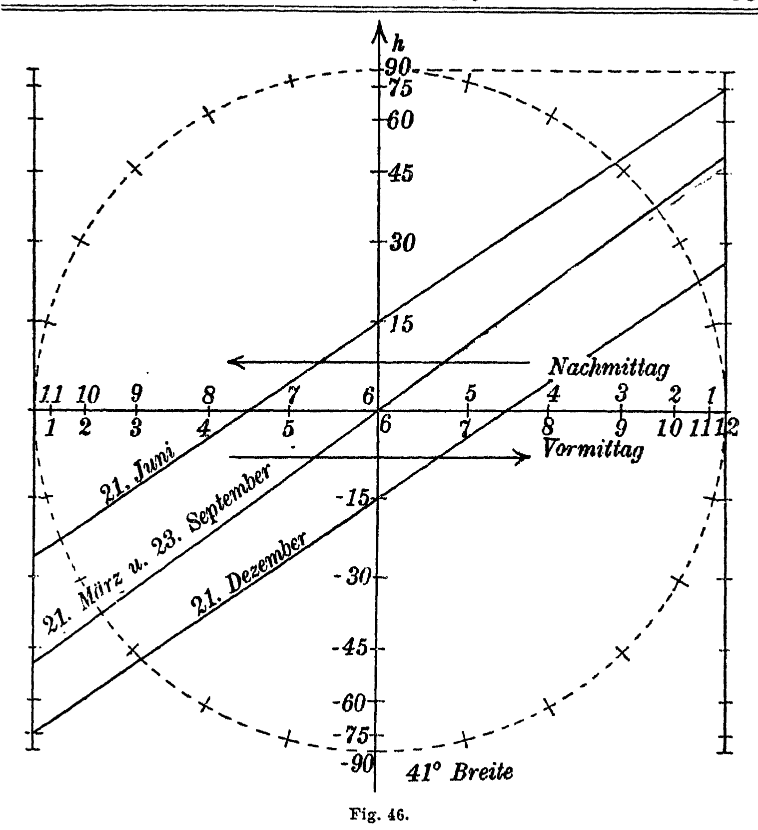


Fig. 46.

Die Werte von $\varphi + \delta$ und $\varphi - \delta$ liefern die Schnittpunkte mit den Senkrechten $x = -1$ und $x = +1$, sodaß die Geraden diesen Tagen im Jahre entsprechend gezogen werden können. Die beiden äußeren Linien sind parallel, aber die mittlere ist steiler. Ihre Schnittpunkte mit der Horizontalen $h = 0$ geben die Zeit des Sonnenauf- und unterganges.[1])

Genau genommen entsprechen die Geraden nicht bestimmten Tagen. Die durch einen beliebigen Wert von δ bestimmte Gerade ändert

1) Das heißt den Moment, wo der Mittelpunkt der Sonnenscheibe auf dem Horizont gesehen werden würde, wenn es keine atmosphärische Brechung gäbe. Um die Brechung zu berücksichtigen, müßte man an Stelle der Linie $h = 0$ die Linie $h = -0{,}6^\circ$ in Betracht ziehen.

im Laufe des Tages ihre Lage fortwährend, da sich δ fortwährend verändert. Aber die Änderung von δ während eines Tages ist kaum wahrnehmbar, wenn die Zeichnung nicht in sehr großem Maßstab ausgeführt ist.

Wenn in der Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

a und b von w unabhängig sind und nur c eine Funktion von w ist, sind alle Geraden $w =$ const. parallel. In diesem Falle ist es nicht nötig, die Geraden $w =$ const. zu ziehen; es genügt vielmehr eine zu den Linien $w =$ const. rechtwinklige Linie zu ziehen und mit einer Skala zu versehen, auf der die Punkte, welche äquidistanten Werten von $w =$ const. entsprechen, bezeichnet sind. Auf die Zeichnung legt man ein Blatt aus durchsichtigem Papier oder Zelluloid, auf welchem drei gerade Linien gezeichnet sind, die von einem Punkte ausgehen und zu den Richtungen der u- v- und w-Skala rechtwinklig laufen (Fig. 47). Wenn man das durchsichtige Blatt, ohne es zu drehen, so schiebt, daß die ersten zwei Geraden die u- und v-Skala an gegebenen Punkten schneiden, wird die w-Skala von der dritten Geraden in dem dem Wert von w entsprechenden Punkte geschnitten werden. Diese Methode hat den Vorteil, daß man dasselbe Papier für eine Menge Gleichungen zwischen drei Veränderlichen benützen kann, da man eine große Zahl von Skalen nebeneinander legen kann. Bei einer einzigen Gleichung kann man auch den Bereich der Werte u, v, w in eine Reihe kleiner Bereiche teilen und für jeden drei Skalen zeichnen, indem man alle u-Skalen oder v-Skalen oder w-Skalen nebeneinander legt. Die Zeichnung wird dann dieselbe Genauigkeit haben wie eine sehr viel größere, auf der für jede der drei Veränderlichen nur eine Skala ist.

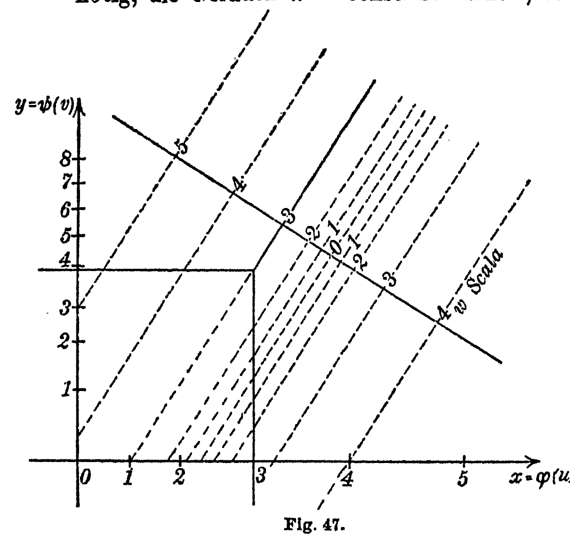


Fig. 47.

§ 10. Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene.

Betrachten wir nun zwei Größen x und y jede als Funktion zweier anderer Größen u und v

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v).$$

Um dieser Beziehung zwischen zwei Größenpaaren eine geometrische Bedeutung zu geben, betrachten wir x und y als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes auf einer Ebene und u, v als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes auf einer anderen Ebene. Dann entsprechen die beiden Punkte einander in gewisser Weise. Wenn die Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ für die Werte u, v eines gewissen Bereiches definiert sind, werden sie für jeden Punkt u, v dieses Bereiches einen Punkt in der xy-Ebene ergeben. Nennen wir dies eine Abbildung der uv-Ebene auf die xy-Ebene. Ebenso läßt sich eine Funktion einer Veränderlichen $x = \varphi(u)$ als die Abbildung der u-Linie auf die x-Linie auffassen. Man kann daher sagen, daß die Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene in gewissem Sinne die Verallgemeinerung der Idee einer Funktion einer Veränderlichen darstellt. Nehmen wir an, daß $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ beide nur je einen Wert für gegebene Werte von u und v, für welche sie definiert sind, haben. Dann wird auf der xy-Ebene immer nur ein Punkt einem gegebenen Punkte in der uv-Ebene entsprechen. Aber einem gegebenen Punkte in der xy-Ebene können sehr wohl mehrere Punkte der uv-Ebene entsprechen.

Versuchen wir dies durch eine graphische Darstellung der Abbildung von Ebenen auf einander klar zu machen. Man zieht zu diesem Zwecke die Kurven $x =$ const. und $y =$ const. auf der uv-Ebene für äquidistante Werte von x und y. Diesen entsprechen auf der xy-Ebene äquidistante Parallelen zu der x-Achse und zu der y-Achse (siehe Fig. 48). Der Schnittpunkt zweier Geraden $x = a$ und $y = b$ entspricht den Schnittpunkten der Kurven

$$\varphi(u,v) = a \quad \text{und} \quad \psi(u,v) = b$$

auf der u,v-Ebene. Wenn sich diese in dem betrachteten Bereich der u,v-Ebene nur einmal schneiden, dann entsprechen einander nur je ein Punkt in dem betrachteten Bereich der u,v-Ebene und ein Punkt der xy-Ebene. Es kann aber auch vorkommen, daß zwei solche Kurven sich mehrmals schneiden. Wir wollen die Bedingungen dafür untersuchen, daß dies nicht der Fall ist.

Betrachten wir die Kurven $x = \text{const.}$ auf der uv-Ebene als die senkrechten Projektionen der Kurven gleicher Höhe auf einer über dem Teil der uv-Ebene sich ausdehnenden Fläche. Von einem belie-

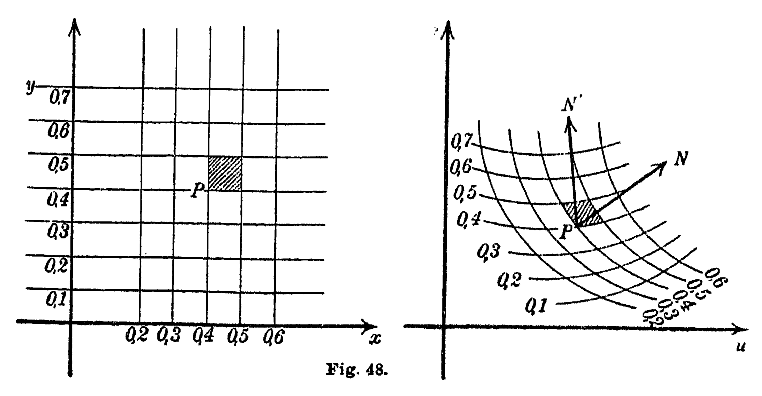


Fig. 48.

bigen Punkte P dieser Fläche, welcher den Werten u, v entspricht, rücken wir nun auf der Fläche um einen unendlich kleinen Betrag weiter, indem wir u in $u + du$, v in $v + dv$ und x in $x + dx$ verändern, wo dann

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv.$$

Schreiben wir $\quad du = \cos\alpha\, ds, \quad dv = \sin\alpha\, ds,$

wo ds die Länge der unendlich kleinen Strecke von u, v bis $u + du$, $v + dv$ in der uv-Ebene und α den von ihrer Richtung mit der positiven u-Achse gebildeten Winkel bedeuten. Sei PN eine Gerade, deren Projektionen auf den u- und v-Achsen gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sind, und schreiben wir $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = r \cos\lambda, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = r \sin\lambda,$

wo r die Länge der Strecke PN positiv genommen und λ der von ihrer Richtung mit der positiven u-Achse gebildete Winkel sind. Dann haben wir

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = r\,ds \cos(\alpha - \lambda),$$

oder

$$\frac{dx}{ds} = r \cos(\alpha - \lambda).$$

$\frac{dx}{ds}$ mißt die Steilheit des Anstiegs. Es ist positiv, wenn die Richtung nach oben, und negativ wenn sie nach unten läuft, und sein Wert

ist gleich der Tangente des Steigungswinkels. Aus der Gleichung

$$\frac{dx}{ds} = r \cos(\alpha - \lambda)$$

erkennt man, daß die Steigung für $\alpha = \lambda$, wo $\frac{dx}{ds} = r$, am steilsten ist. Die Gerade PN auf der uv-Ebene gibt die senkrechte Projektion der Richtung des steilsten Anstiegs auf der Fläche $x = \varphi(u, v)$ an und die Länge von PN, in derselben Längeneinheit wie u und v gemessen, ist gleich der Tangente des Steigungswinkels. Man nennt die Strecke PN den Gradienten der Funktion $\varphi(u, v)$ im Punkte u, v. Die Richtung des Gradienten ist rechtwinklig zu der Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$, welche durch den Punkt u, v hindurchgeht; denn in der Richtung der Kurve haben wir

$$\frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{und daher} \quad \alpha - \lambda = \pm 90^0.$$

Ist PN' der Gradient der Funktion $\psi(u, v)$ im Punkte u, v, so muß der Winkel zwischen PN und PN' entweder gleich dem von den Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$, die sich in den Punkte u, v schneiden, gebildeten Winkel, oder gleich seinem Ergänzungswinkel sein, jenachdem man den einen oder den anderen Schnittwinkel betrachtet.

Nehmen wir an, daß die Gradienten PN und PN' in keinem Punkte des betrachteten Bereichs der uv-Ebene verschwinden, und daß ihre Länge und ihre Richtung stetige Funktionen von u und v seien; nehmen wir ferner an, daß der Gradient PN' (Komponenten $\frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}$) für den ganzen Bereich links von dem Gradienten PN (Komponenten $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$) oder für den ganzen Bereich rechts von dem Gradienten PN liegt, dann folgt, daß jede der Kurven $x = \text{const.}$ jede der Kurven $y = \text{const.}$ in dem betrachteten Bereich nur einmal schneiden kann.

Dies läßt sich durch Betrachtung der Richtung der Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ in der uv-Ebene beweisen. Betrachten wir auf der Kurve $y = \text{const.}$ die Richtung, in welcher x zunimmt. Wenn diese Richtung von PN abweicht, muß die Abweichung weniger als 90^0 betragen, weil $\frac{dx}{ds}$ und daher $\cos(\alpha - \lambda)$ positiv ist. Betrachten wir ferner auf der Kurve $x = \text{const.}$ die Richtung, in welcher y zunimmt. Wenn sie von PN' abweicht, muß die Abweichung weniger als 90^0 betragen. Wir wollen diese Richtungen die x-Richtung (auf der Kurve $y = \text{const.}$) und die y-Richtung (auf der Kurve $x = \text{const.}$)

benennen. Wenn nun der Gradient PN' links vom Gradienten PN liegt, muß die y-Richtung auch links von PN liegen, (denn, läge sie rechts von PN, so würde sie, da sie zu PN rechtwinklig ist, mit PN' einen stumpfen Winkel bilden) und daher muß sie links von der x-Richtung liegen, (denn, wenn sie rechts läge, würde PN', welches zur x-Richtung rechtwinklig ist, mit der y-Richtung einen stumpfen Winkel bilden, was, wie wir gesehen haben, nicht möglich ist). Ebenso ist leicht einzusehen, daß, wenn PN' rechts von PN liegt, die y-Richtung auch rechts von der x-Richtung liegen muß. Wenn also PN' in dem ganzen betrachteten Bereich auf einer und derselben Seite von PN liegt, wird ebenso die y-Richtung in dem ganzen betrachteten Bereich auf ein und derselben Seite der x-Richtung liegen. Dadurch ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß zwei Kurven $x =$ const. und $y =$ const. sich in mehr als einem Punkte schneiden können. Denn, wenn wir der Kurve $y =$ const. in der x-Richtung folgen, so überschreiten wir beim ersten Schnittpunkt die Kurve $x =$ const. von der Seite der kleineren x-Werte her zur Seite der größeren x-Werte. Wenn nun die x-Werte, indem wir der Kurve $y =$ const. weiter folgen, fortgesetzt zunehmen, können wir offenbar nicht zu einer Kurve $x =$ const., die einem kleineren x-Wert entspricht, zurückgelangen. Die einzige Möglichkeit eines zweiten Schnittpunktes würde sich dadurch ergeben, daß sich die Richtung, in der der x-Wert auf der Kurve $y =$ const. zunimmt, umkehrte, so daß beim Fortschreiten in der gleichen Richtung x wieder abnähme.

Dasselbe gilt für die Kurve $x =$ const. Wenn wir einer Kurve $x =$ const. von einem Schnittpunkte mit einer Kurve $y =$ const. aus weiter bis zu einem zweiten Schnittpunkt mit derselben Kurve folgen, ist die einzige Möglichkeit die, daß sich auch die y-Richtung umkehrt. Dieses aber ist ausgeschlossen, weil es damit in Widerspruch steht, daß die y-Richtung in dem ganzen Bereich auf einer und derselben Seite der x-Richtung liegen sollte. (Fig. 49.)

Fig. 49.

A B

Man kann die Sache mit Vorteil auch von einem anderen Gesichtspunkt aus ansehen. Betrachten wir einen Punkt A auf der uv-Ebene mit den Koordinaten u und v und ändern wir u und v um unendlich kleine Beträge du und dv, so daß wir vier Punkte $ABCD$ erhalten, die ein Rechteck mit den Koordinaten

$$A : u, v;\ B : u + du, v;\ C : u, v + dv;\ D : u + du, v + dv \quad \text{bilden.}$$

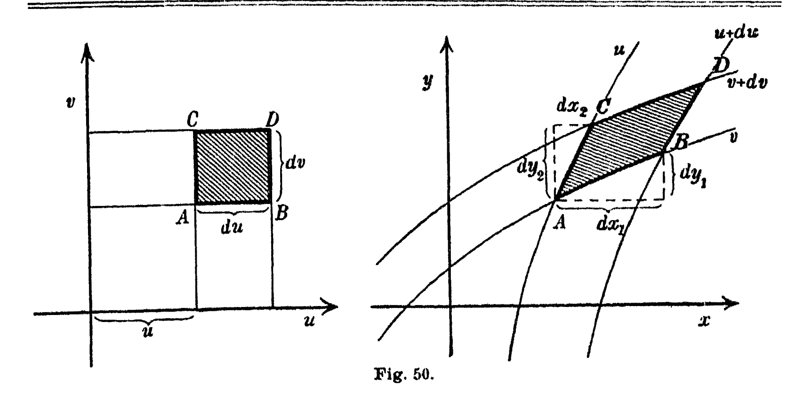


Fig. 50.

Auf der xy-Ebene sind diese Punkte in den Punkten A, B, C, D, den Schnittpunkten zweier Kurven u und $u + du$ mit zwei Kurven v und $v + dv$ abgebildet (Fig. 50).

Die Projektionen der Geraden AB in der xy-Ebene auf die Koordinatenachsen erhält man, indem man die Veränderungen von x und y für einen konstanten Wert von v und einen um du veränderten Wert von u berechnet

$$dx_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du, \quad dy_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du.$$

Ebenso erhält man die Projektionen von AC durch Berechnung der Veränderungen von x und y für einen konstanten Wert von u und einen um dv veränderten Wert von v,

$$dx_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv, \quad dy_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv.$$

Bezeichnen wir AB und AC mit ds_1 und ds_2, ferner mit γ_1 und γ_2 die Winkel zwischen der x-Achse und AB resp. AC, so ist:

$$dx_1 = ds_1 \cos \gamma_1, \quad dy_1 = ds_1 \sin \gamma_1$$

und

$$dx_2 = ds_2 \cos \gamma_2, \quad dy_2 = ds_2 \sin \gamma_2,$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos \gamma_1 \frac{ds_1}{du}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin \gamma_1 \frac{ds_1}{du}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \cos \gamma_2 \frac{ds_2}{dv}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \sin \gamma_2 \frac{ds_2}{dv}.$$

Wir können

$$\frac{ds_1}{du} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2}$$

den Maßstab der Abbildung im Punkte A in der Richtung AB und

$$\frac{ds_2}{dv} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2}$$

den Maßstab der Abbildung im Punkte A in der Richtung AC nennen. Dabei ist die uv-Ebene als die ursprüngliche angenommen, die auf die xy-Ebene abgebildet wird. Nimmt man die Sache umgekehrt, dann sind die Maßstäbe der Abbildung in den Richtungen AB und AC die reziproken Werte $\frac{du}{ds_1}$ und $\frac{dv}{ds_2}$.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ in der xy-Ebene ist

$$ds_1 ds_2 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du\, dv.$$

Nach der Definition der Winkel γ_2 und γ_1 ist $\sin(\gamma_2 - \gamma_1)$ positiv, wenn die Richtung AC von der Richtung AB nach links zeigt (die positive y-Achse links von der positiven x-Achse angenommen) und $\sin(\gamma_2 - \gamma_1)$ negativ, wenn AC nach rechts zeigt. Der Wert von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u},$$

den man auch die Funktionaldeterminante der Funktionen $\varphi(u,v)$ und $\psi(u,v)$ nennt, drückt daher das Verhältnis des Flächeninhaltes von $ABCD$ in den beiden Ebenen aus, und sein positives oder negatives Vorzeichen bedeutet die Lage der Richtungen AB und AC in der xy-Ebene zueinander. Geht also die Funktionaldeterminante an einer Stelle durch O, so heißt das, daß die Richtungen AB und AC zusammenfallen, die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ sich also berühren.

Wir haben den Maßstab der Abbildung von Strecken in den Richtungen AB und AC gefunden; suchen wir nun, ihn für Strecken in beliebiger Richtung auszudrücken. Von einem beliebigen Punkte A in der uv-Ebene, dessen Koordinaten u und v sind, aus, gehen wir zu einem dicht dabei gelegenen Punkte D über, dessen Koordinaten $u + \triangle u$, $v + \triangle v$ seien. In der xy-Ebene finden wir die entsprechenden Punkte A und D (Fig. 51) mit den Koordinaten

$$A\colon \begin{array}{l} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{array} \qquad D\colon \begin{array}{l} x + \triangle x = \varphi(u + \triangle u, v + \triangle v) \\ y + \triangle y = \psi(u + \triangle u, v + \triangle v). \end{array}$$

Wir entwickeln nach dem Taylorschen Lehrsatz und, indem wir, der Kürze wegen,

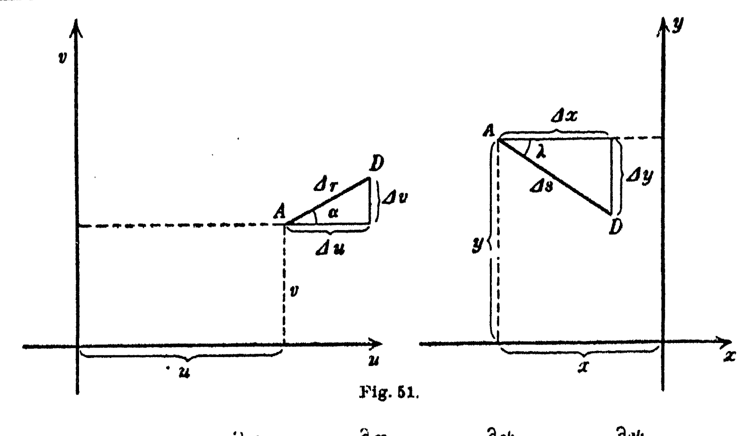


Fig. 51.

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \psi_u = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \psi_v = \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

schreiben, erhalten wir

$$\triangle x = \varphi_u \triangle u + \varphi_v \triangle v + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

$$\triangle y = \psi_u \triangle u + \psi_v \triangle v + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Die Länge und den Richtungswinkel von AD bezeichnen wir in der uv-Ebene mit $\triangle r$ und α, in der xy-Ebene mit $\triangle s$ und λ. Der Grenzwert, dem sich das Verhältnis $\frac{\triangle s}{\triangle r}$ nähert, wenn D, ohne daß sich die Richtung AD verändert, an A heranrückt, ist der Maßstab der Abbildung im Punkte A in der Richtung AD.

Schreiben wir $\triangle u = \triangle r \cos\alpha$, $\triangle v = \triangle r \sin\alpha$,

so ergibt sich

$$\triangle x = (\varphi_u \cos\alpha + \varphi_v \sin\alpha)\, \triangle r + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

$$\triangle y = (\psi_u \cos\alpha + \psi_v \sin\alpha)\, \triangle r + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Dividiert man durch $\triangle r$ und verkleinert $\triangle r$ beliebig, so findet man als Grenzwert

$$\frac{dx}{dr} = \varphi_u \cos\alpha + \varphi_v \sin\alpha, \quad \frac{dy}{dr} = \psi_u \cos\alpha + \psi_v \sin\alpha.$$

Statt $\frac{dx}{dr}$ und $\frac{dy}{dr}$ kann man auch $\frac{ds}{dr}\cos\lambda$, $\frac{ds}{dr}\sin\lambda$ schreiben.

$$\frac{ds}{dr}\cos\lambda = \varphi_u \cos\alpha + \varphi_v \sin\alpha, \quad \frac{ds}{dr}\sin\lambda = \psi_u \cos\alpha + \psi_v \sin\alpha.$$

Diese Gleichungen zeigen den Maßstab der Abbildung $\frac{ds}{dr}$, welcher den verschiedenen Richtungen λ in der xy-Ebene und α in der uv-Ebene entspricht.

Durch Einführung komplexer Zahlen kann der Zusammenhang noch besser deutlich gemacht werden.

Setzen wir

$$z = \frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dr} i = \frac{ds}{dr} e^{\lambda i}, \qquad z_1 = \varphi_u + \psi_u i \qquad z_2 = \varphi_v + \psi_v i.$$

Multipliziert man die zweite der beiden letzten Gleichungen auf S. 63 mit i und addiert die beiden, so kann man sie als eine einzige Gleichung in der komplexen Form

$$z = z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha$$

schreiben. Der Modul von z ist der Maßstab der Abbildung der uv-Ebene im Punkte A in der Richtung α. Der Winkel von z ergibt die der Richtung α entsprechende Richtung in der xy-Ebene. Für $\alpha = 0$ haben wir $z = z_1$ und $z = z_2$ für $\alpha = 90^0$.

Man setze ein

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$$

und schreibe
$$a = \frac{z_1 + \frac{z_2}{i}}{2} \qquad b = \frac{z_1 - \frac{z_2}{i}}{2},$$

so daß der Ausdruck für z wird $z = a e^{\alpha i} + b e^{-\alpha i}$.

Dies führt auf eine einfache geometrische Konstruktion der komplexen Zahlen z für verschiedene Werte von α. Der Ausdruck $a e^{\alpha i}$ wird durch die Punkte des Kreises dargestellt, der entsteht, wenn man die die komplexe Zahl a ausdrückende Strecke durch die Winkel $\alpha = 0 \ldots 2\pi$ um den Nullpunkt dreht; ebenso der Ausdruck $b e^{-\alpha i}$ durch die Punkte des Kreises, der entsteht, wenn man die b ausdrückende Strecke im entgegengesetzten Sinne durch die Winkel $\alpha = 0 \ldots -2\pi$ um den Nullpunkt dreht (Fig. 52). Die Addition der beiden komplexen Zahlen $a e^{\alpha i}$ und $b e^{-\alpha i}$ für beliebige Werte von α ist leicht auszuführen. Die der komplexen Zahl z entsprechenden Punkte beschreiben eine Ellipse, deren zwei

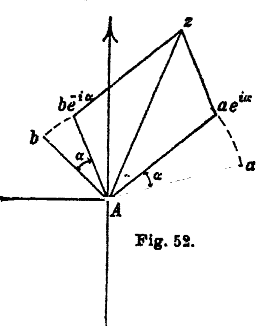


Fig. 52.

Hauptachsen die von a und b gebildeten Winkel halbieren. Dies ist leicht zu erkennen, wenn man schreibt:

$$a = r_1 e^{(\alpha_0 - \alpha_1) i}, \quad b = r_2 e^{(\alpha_0 + \alpha_1) i}.$$

α_0 bedeutet die Richtung, welche den von a und b gebildeten Winkel halbiert, und α_1 bezeichnet den halben Winkel zwischen a und b, positiv oder negativ genommen, je nach der Lage von a und b

$$z = r_1 e^{(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha) i} + r_2 e^{(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha) i}$$

oder

$$z e^{-\alpha_0 i} = r_1 e^{(\alpha - \alpha_1) i} + r_2 e^{-(\alpha - \alpha_1) i}$$

$$= (r_1 + r_2) \cos(\alpha - \alpha_1) + (r_1 - r_2) \sin(\alpha - \alpha_1) i.$$

Bezeichnet man die Koordinaten der komplexen Zahl $z e^{-\alpha_0 i}$ mit ξ und η, so hat man

$$\frac{\xi}{r_1 + r_2} = \cos(\alpha - \alpha_1) \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{r_1 - r_2} = \sin(\alpha - \alpha_1).$$

ξ und η genügen der Gleichung

$$\frac{\xi^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{\eta^2}{(r_1 - r_2)^2} = 1,$$

die eine Ellipse darstellt.

Diese Ellipse, durch einen Winkel α_0 gedreht, ergibt die Punkte, welche z entsprechen. Die Hauptachsen sind $2(r_1 + r_2)$ und $2(r_1 - r_2)$ (Fig. 53). Die Konstruktion von Fig. 53 ist deutlich. Nachdem z_1 und z_2 aufgetragen sind, findet man $\frac{z_2}{i}$ und $\frac{-z_2}{i}$, indem man AZ_2 durch einen rechten Winkel nach rechts und nach links dreht. Von diesen Punkten zieht man Gerade nach Z_1. Die Halbierung dieser Geraden gibt a und b.

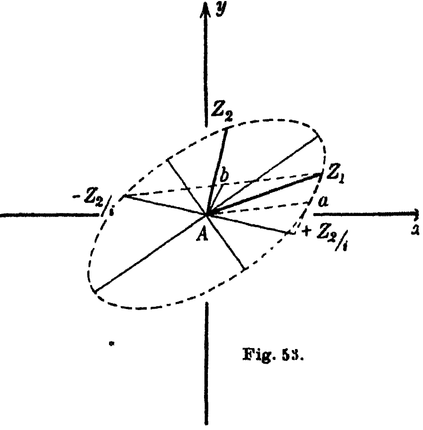


Fig. 53.

Die Radien der so gefundenen Ellipse, in der eingeführten Längeneinheit gemessen, geben die Maßstäbe der Abbildung für die verschiedenen Richtungen in der xy-Ebene. Man könnte auch sagen, die Ellipse sei das Abbild in der xy-Ebene eines unendlich kleinen Kreises in der uv-Ebene, im Verhältnis des unendlich kleinen Radius zu 1 vergrößert und mit dem Mittelpunkte in A.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun den Fall betrachten, wo die Abbildung nicht mehr „ein-eindeutig" ist, d. h. also, wo sich die x- und y-Kurven mehr als einmal schneiden. Wie wir gesehen haben, wird das eintreten, wenn der Winkel zwischen den Gradienten oder auch der zwischen den Kurven selbst nicht überall im Bereich dasselbe Vorzeichen hat. Es wird also eine Kurve geben, auf welcher er den Wert 0 hat, wo sich demnach die Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ berühren. Hier muß, wie oben gezeigt, die Funktionaldeterminante verschwinden. Dasselbe zeigt auch die Darstellung mit komplexen Zahlen. Denn wenn die Winkel von z_1 und z_2 gleich sind, so müssen, da $z_1 = \varphi_u + \psi_u i$ und $z_2 = \varphi_v + \psi_v i$, φ_u und ψ_u proportional φ_v und ψ_v sein, mithin $\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = 0$.

Fig. 54a.

Fig. 54b.

Nehmen wir also an, daß sich die Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ in der uv-Ebene überall schneiden, außer auf einer gewissen Kurve, wo ihre Richtungen in der in Fig. 54 veranschaulichten Weise zusammenfallen. Auf dieser Kurve muß, wie erwähnt, die Funktionaldeterminante $D = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u$ verschwinden, weil die Richtungen der Gradienten zusammenfallen. Untersuchen wir nun die Abbildung auf die xy-Ebene.

Verfolgen wir eine der Kurven $y = \text{const.}$, sagen wir $y = y_1$, in

ven $x = x_4, x_3, x_2$ bis wir im Punkte A der Kurve $x = x_1$ die Kurve $D = 0$ erreichen. In der xy-Ebene ist die entsprechende Bahn eine Parallele zur x-Achse mit dem Abstande y_1, welche x_4, x_3 und x_2 schneidet und bei x_1 einen Punkt A erreicht. Schreiten wir nun auf der Kurve $y = y_1$ in der uv-Ebene jenseits von $D = 0$ weiter fort, so überschreiten wir von neuem die Kurven x_2, x_3, usw. dieses Mal in umgekehrter Ordnung. Also führt die entsprechende Bahn in der xy-Ebene nicht über A hinaus, sondern durch dieselben Punkte $x_2 y_1$; $x_3 y_1$, usw. zurück. Dasselbe gilt für jede beliebige der $y =$ const. Kurven. Zeichnet man in der xy-Ebene die Linie, die den Punkten in der uv-Ebene entspricht, wo $x =$ const. und $y =$ const. sich berühren, so findet man die Abbildung der uv-Ebene nur auf einer Seite dieser Kurve. Die andere Seite hat keine entprechende Punkte u, v. Jedem Punkte C auf dieser Seite entsprechen aber in der uv-Ebene zwei Punkte C, die auf verschiedenen Seiten der Kurve $D = 0$ liegen. Man denke sich zwei Blätter Papier auf die xy-Ebene gelegt und beide der Kurve AB entlang durchschnitten. Die beiden jenseits der Kurve gelegenen Stücke verwerfen wir und kleben die beiden übrigbleibenden Teile längs der Kurve zusammen. Dann ist die uv-Ebene derartig auf das Papier abgebildet, daß immer ein Punkt und nur ein Punkt auf dem Papier jedem im betrachteten Bereich der uv-Ebene gelegenen Punkt entspricht. Die Kurve $D = 0$ in der uv-Ebene entspricht dem Rande, wo die beiden Papierstücke zusammengeklebt sind. Jede gerade oder krumme Linie, die in der uv-Ebene die Kurve $D = 0$ schneidet, entspricht einer Linie, die von einem Papierblatt auf das andere übergeht. Sie braucht dabei ihre Richtung nicht plötzlich zu ändern, wenn sie den Rand erreicht, denn sie kann in der Richtung der Tangente auf ihn zukommen. Dies ist tatsächlich die Regel und eine plötzliche Richtungsänderung die Ausnahme. Jede beliebige Linie LAL (Fig. 55) in der uv-Ebene, deren Tangente an dem Schnittpunkte A mit der Kurve $D = 0$ nicht mit der den Kurven $x =$ const. und $y =$ const. gemeinsamen Tangente zusammenfällt, wird einer Linie in der xy-Ebene entsprechen, die ihre Richtung am Rande nicht plötzlich ändert.

Fig. 55.

Dies ist am besten analytisch zu verstehen. Betrachten wir entsprechende Richtungen an den Punkten A der uv-Ebene und der xy-Ebene. Wie wir oben gesehen haben, ist die Beziehung entsprechender Richtungen (Fig. 56) durch die Gleichungen

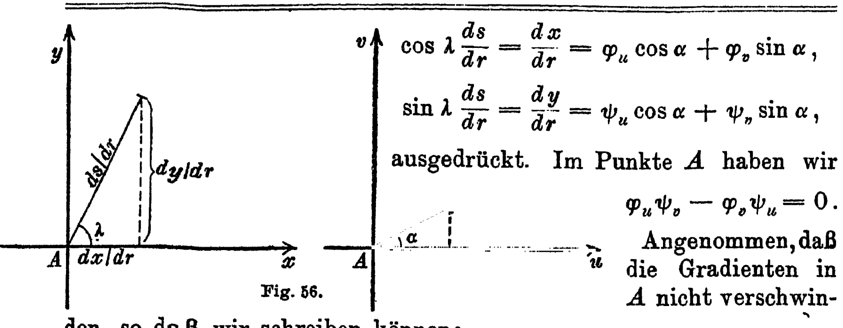


Fig. 56.

$$\cos\lambda\frac{ds}{dr}=\frac{dx}{dr}=\varphi_u\cos\alpha+\varphi_v\sin\alpha,$$

$$\sin\lambda\frac{ds}{dr}=\frac{dy}{dr}=\psi_u\cos\alpha+\psi_v\sin\alpha,$$

ausgedrückt. Im Punkte A haben wir

$$\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u=0.$$

Angenommen, daß die Gradienten in A nicht verschwinden, so daß wir schreiben können:

$$\varphi_u=r\cos\gamma,\quad \varphi_v=r\sin\gamma,\quad \psi_u=r'\cos\gamma',\quad \psi_v=r'\sin\gamma',$$

wo r und r' positive Größen sind, so reduziert sich die Gleichung $\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u=0$ auf $\sin(\gamma-\gamma')=0$, das ist $\gamma=\gamma'$, oder $\gamma=\gamma'+180^0$. Folglich ist

$$\cos\lambda\frac{ds}{dr}=r\cos(\alpha-\gamma)$$

$$\sin\lambda\frac{ds}{dr}=r'\cos(\alpha-\gamma')=\pm r'\cos(\alpha-\gamma).$$

Wir haben also für alle Richtungen in der uv-Ebene, für welche $\cos(\alpha-\gamma)$ nicht null ist,

$$\operatorname{tg}\lambda=\pm\frac{r'}{r}.$$

Das will sagen: in der xy-Ebene entspricht nur eine bestimmte Richtung und die ihr entgegengesetzte allen den verschiedenen α-Richtungen mit Ausnahme derjenigen, für welche $\cos(\alpha-\gamma)=0$. In diesem Ausnahmefall, d. h. wenn die Richtung α rechtwinklig zur Richtung γ des Gradienten ist, also mit der der Kurven $x=\text{const.}$ und $y=\text{const.}$ übereinstimmt, haben wir

$$\cos\lambda\frac{ds}{dr}=0\qquad\qquad \sin\lambda\frac{ds}{dr}=0.$$

Daher $\frac{ds}{dr}=0$ und λ bleibt unbestimmt. Jede beliebige Richtung λ, für welche $\operatorname{tg}\lambda$ von $\pm\frac{r'}{r}$ abweicht, entspricht einer festen Richtung $\alpha=\gamma+90^0$ oder $\alpha=\gamma-90^0$, während $\frac{ds}{dr}=0$.

Da die Kurve $D=0$ auf den Rand der Papierblätter abgebildet ist, sind alle Linien, welche in der uv-Ebene die Kurve $D=0$ in einer von der Richtung der Kurven $x=\text{const.}$ und $y=\text{const.}$ abweichenden Richtung schneiden, in der xy-Ebene als Kurven abgebildet, die in A eine mit dem Rande gemeinsame Tangente haben.

Alle Linien auf einem der beiden Papierbogen, die im Punkte A in einer von der Richtung des Randes abweichenden Richtung auf den Rand treffen, müssen Abbildungen von Linien der uv-Ebene sein, die A in der Richtung der Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ erreichen. Der Maßstab der Abbildung ist null in der Richtung $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ In jeder anderen Richtung erweist er sich von null verschieden, denn

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{(r^2 + r'^2)\cos^2(\alpha - \gamma)}.$$

Er hat ein Maximum in der Richtung $\alpha = \gamma$ oder $= \gamma + 180^0$, die zu den Kurven $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ rechtwinklig ist.

Zum Verständnis dieser Einzelheiten wird es beitragen, wenn wir ein Beispiel betrachten, wo die Abbildung der uv-Ebene auf die xy-Ebene eine einfache geometrische Bedeutung hat, wo nämlich die Ebenen Grund- und Aufriß einer gekrümmten Fläche darstellen. Der Rand in der xy-Ebene ist hier der Umriß der Fläche, die Projektion derjenigen Punkte, wo die Tangentialebene zu der Aufrißebene rechtwinklig ist.

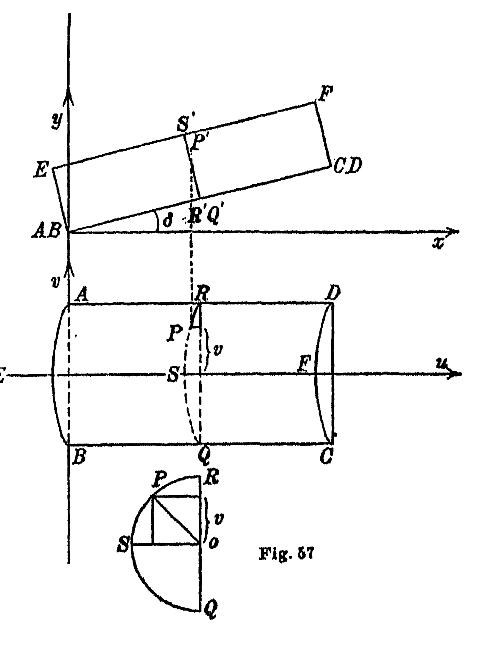


Fig. 57

Denken wir uns einen Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt, der durch eine durch seine Achse gelegte Ebene in zwei halbe Zylinder geteilt ist. Den einen halben Zylinder denken wir uns in solcher Lage, daß seine Achse mit der Grundrißebene einen Winkel δ bildet, während die Aufrißebene parallel zu seiner Achse sei (Fig 57). Führen wir rechtwinklige Koordinaten u, v in der Grundrißebene und rechtwinklige Koordinaten x, y in der Aufrißebene ein. Ein Punkt P auf dem Zylinder ist durch gewisse Werte u, v, die seinen Grundriß, und gewisse Werte x, y, die seinen Aufriß angeben, bestimmt. Es ist aus Fig. 57 leicht zu erkennen, daß

$$x = u \quad \text{und} \quad y = u \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{\cos\delta}\sqrt{a^2 - v^2},$$

wo a der Radius des Querschnittes ist. Untersuchen wir nun den

Aufriß der Punkte P als Abbildung ihres Grundrisses. Die Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ sind in diesem Falle

$$\varphi(u, v) = u$$
$$\psi(u, v) = u \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{\cos\delta}\sqrt{a^2 - v^2}$$

und $\varphi_u = 1, \quad \varphi_v = 0;$

$$\psi_u = \operatorname{tg} \delta, \quad \psi_v = -\frac{v}{\cos\delta\sqrt{a^2 - v^2}},$$

$$\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = -\frac{v}{\cos\delta\sqrt{a^2 - v^2}}.$$

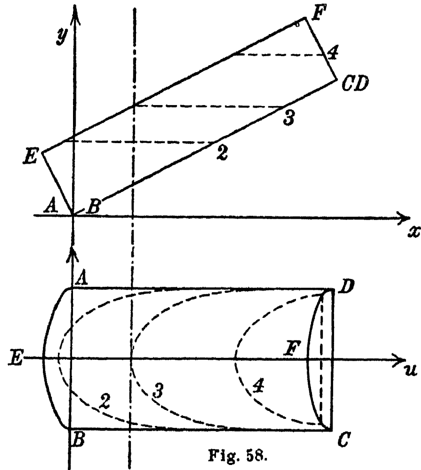


Fig. 58.

Die Funktionaldeterminante verschwindet für $v = 0$ auf der Linie EF. Die Linien $y =$ const. sind die Schnittlinien des Zylinders mit horizontalen Ebenen. Im Aufriß sind es horizontale Geraden, im Grundriß Ellipsen (Fig. 58). Verfolgen wir eine dieser Kurven, so überschreiten wir die Linie EF im Grundriß, im Aufriß aber berühren wir sie nur und kehren alsdann auf derselben Horizontalen zurück. Die Linien $x =$ const. sind in beiden Ebenen Gerade, entsprechen im Raume aber Ellipsen. Auch hier überschreiten wir in der Grundrißebene die Linie EF, die wir in der Aufrißebene nur berühren, um dann in der Vertikalen in der Richtung nach unten wieder zurück zu gehen. Die Projektion jeder auf dem Zylinder verlaufenden Kurve, die EF in einer nicht rechtwinklig zu der Aufrißebene stehenden Richtung schneidet, auf die Aufrißebene, hat EF (der Aufrißebene) zur Tangente, denn die wirkliche Tangente im Raume kann, da sie in der Tangentialebene des Zylinders liegt, keine andere Projektion haben, wenn sie nicht auf der Aufrißebene senkrecht steht. In diesem letzteren Falle ist die Projektion der Tangente ein Punkt und die Tangente des Aufrisses wird durch die Neigung der oskulatorischen Ebene bestimmt.

Fig. 59.

Wir wollen noch den speziellen Fall betrachten, wo die Kurve $D = 0$ in der uv-Ebene mit einer der Kurven $x =$ const. oder $y =$ const. zusammenfällt (Fig. 59), wobei angenommen ist, daß die Gradienten der Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$

an den Punkten dieser Kurve nicht verschwinden. Wir haben gesehen, daß an einem Punkte, wo $D = 0$ ist, der Maßstab der Abbildung in den Richtungen der Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ oder $\psi(u, v) = \text{const.}$ verschwinden muß Läßt man die Kurve $D = 0$ mit einer Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ zusammenfallen, dann folgt, daß die Länge des Bildes dieser Kurve in der xy-Ebene gleich Null und die Kurve also bei der Abbildung in einen Punkt zusammengezogen sein muß. Denn die Länge des Bildes einer Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ ist gegeben durch das Integral

$$\int \frac{ds}{dr}\, dr,$$

wo dr ein Bogenelement und $\frac{ds}{dr}$ den Maßstab der Abbildung in der Richtung der Kurve bezeichnen. Da $\frac{ds}{dr}$ längs der ganzen Kurve null ist, so muß das Integral notwendig verschwinden.

Als Beispiel wollen wir betrachten:

$$x = uv, \qquad y = v.$$

Die Linien $x = \text{const.}$ in der uv-Ebene sind gleichseitige Hyperbeln, die Linien $y = \text{const.}$ sind Parallelen zur u-Achse (Fig. 60). Längs der u-Achse haben wir gleichzeitig $y = 0$, $x = 0$ und $D = v = 0$. Die ganze u-Achse ist in dem Punkte $x = 0$, $y = 0$ der xy-Ebene abgebildet.

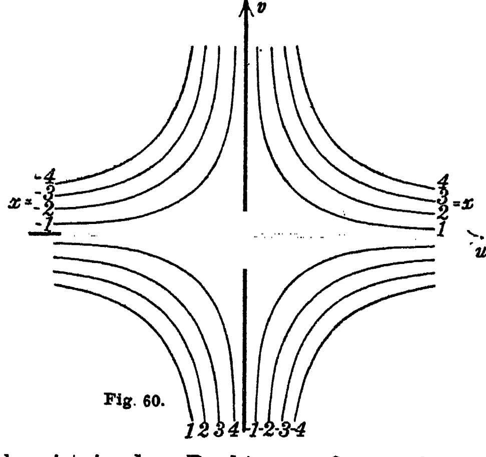


Fig. 60.

Schließlich wollen wir noch den Fall betrachten, wo der Maßstab der Abbildung eines beliebigen Punktes in allen Richtungen derselbe ist, wenn er auch an verschiedenen Punkten nicht derselbe zu sein braucht.

Schreiben wir wie vorher:

$$z_1 = \varphi_u + \psi_u i, \quad z_2 = \varphi_v + \psi_v i, \quad z = \frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dr} i = \frac{ds}{dr} e^{\lambda i},$$

dann ist die Beziehung zwischen dem Maßstab der Abbildung $\frac{ds}{dr}$ und den Winkeln λ, α, welche einander entsprechende Richtungen in der xy- und der uv-Ebene bestimmen, durch die Gleichungen gegeben

$$z = z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha, \quad \text{oder} \quad z = a e^{i\alpha} + b e^{-i\alpha},$$

wo
$$a = \tfrac{1}{2}\left(z_1 + \frac{z_2}{i}\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(z_1 - \frac{z_2}{i}\right).$$

In dem Falle, wo der Maßstab der Abbildung $\frac{ds}{dr}$, d. h. der Modul von z von α unabhängig ist, muß eine der Konstanten a oder b verschwinden, wie man sofort an der Konstruktion von z (Fig. 52) erkennen kann. Betrachten wir den Fall $b = 0$,

$$z = a e^{\alpha i} = \frac{ds}{dr} e^{\lambda i}.$$

Die komplexe Zahl a kann $|a|\, e^{\alpha_0 i}$ geschrieben werden, wo $|a|$ den Modul von a und α_0 den Winkel bezeichnen. Beide können von Punkt zu Punkt verschieden sein, aber an jedem Punkte haben sie bestimmte Werte.

Folglich haben wir $\frac{ds}{dr} = |a|$ und $\lambda = \alpha + \alpha_0$.

Das will sagen: von einem Winkel α, der eine Richtung in der uv-Ebene bestimmt, ausgehend, finden wir den die entsprechende Richtung in der xy-Ebene bestimmenden Winkel λ durch Hinzuaddieren eines bestimmten Winkels α_0. Jede zwei Richtungen α, α' werden daher den gleichen Winkel bilden, wie die entsprechenden Richtungen λ, λ' in der xy-Ebene. Dasselbe trifft zu, wenn $a = 0$ und $z = b e^{-\alpha i}$. Der einzige Unterschied ist der, daß im letzteren Falle die Richtung von z sich mit zunehmenden Werten von α im entgegengesetzten Sinne dreht. Man nennt eine solche Abbildung winkeltreu oder „konform". Analytisch werden Abbildungen dieser Art durch Funktionen komplexer Zahlen dargestellt.

$$x + yi = f(u + vi) \quad \text{oder} \quad x + yi = f(u - vi).$$

Angenommen, daß die Funktion einen Differentialquotienten besitzt, so ist die zugehörige Abbildung konform, denn wir haben

$$z_1 = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} i = f'(u \pm vi), \quad z_2 = \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} i = \pm f'(u \pm vi)\, i,$$

und darum entweder $z_1 = \frac{z_2}{i}$ oder $z_1 = -\frac{z_2}{i}$.

Daher im ersten Falle,

$$a = \tfrac{1}{2}\left(z_1 + \frac{z_2}{i}\right) = z_1, \quad b = \tfrac{1}{2}\left(z_1 - \frac{z_2}{i}\right) = 0$$

und im zweiten Falle $a = 0$, $b = z_1$.

§ 11. Andere Methoden der Darstellung von Beziehungen zwischen drei Veränderlichen.

Die Abbildung einer Ebene auf eine andere kann dazu dienen die graphische Darstellung einer Funktion von zwei Veränderlichen, oder, wenn man will, einer Beziehung zwischen drei Veränderlichen, zu verallgemeinern.

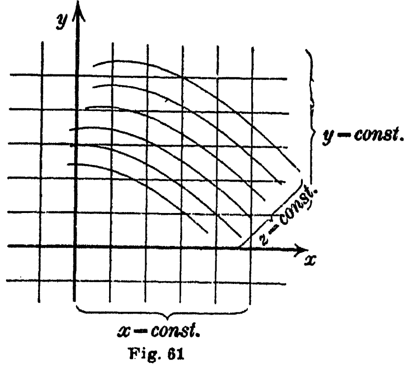


Fig. 61

Wie wir oben gesehen haben, kann eine Gleichung

$$g(x, y, z) = 0$$

zwischen drei Veränderlichen x, y, z dargestellt werden, indem man x und y als rechtwinklige Koordinaten nimmt, und die Kurven $z = \text{const.}$ (Fig. 61) für äquidistante Werte von z aufträgt. Denken wir uns nun die xy-Ebene auf eine andere Ebene abgebildet. Die Linien $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$ werden durch drei Scharen von Kurven darzustellen sein. Der Umstand, daß drei Werte x, y, z der Gleichung $g(x, y, z) = 0$ genügen, wird geometrisch dadurch angezeigt, daß die drei entsprechenden Kurven einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Eine andere Methode gewisse Beziehungen zwischen drei Veränderlichen u, v, w darzustellen besteht darin, daß man drei Kurven zeichnet, deren jede eine Skala trägt. Die Werte u, v, w sind jeder auf einer der drei Skalen abzulesen. Die Beziehung zwischen je drei Werten u, v, w soll nun geometrisch durch die Bedingung ausgedrückt sein, daß die drei entsprechenden Punkte auf einer Geraden liegen (Fig. 62). Diese Methode ist sehr viel bequemer als die, welche drei Kurvenscharen benötigt. Es macht weniger Mühe ein Lineal an zwei Punkte u, v auf zwei Kurven anzulegen und den Wert w auf der Skala der dritten Kurve abzulesen, als den Schnittpunkt zweier bestimmter Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ in dem Netz aufzusuchen, die Kurve $w = \text{const.}$, die durch denselben Punkt hindurchgeht, herauszufinden, und den ihr entsprechenden Wert von w abzulesen. Denn man muß bedenken, daß die bestimmten Werten von u und v entsprechenden Kurven nicht notwendig auf der Zeichnung zu finden sind, sondern interpoliert werden müssen, ebenso die gesuchte Kurve $w = \text{const.}$ Es ist wahr, daß bei beiden Methoden Interpolationen

nötig sind, aber die Interpolation auf Skalen, wie die in Fig. 62, ist leichter vorzunehmen.

Es muß indessen bemerkt werden, daß, während die drei Kurvenscharen eine ganz allgemeingültige Darstellungsmethode jeder belie-

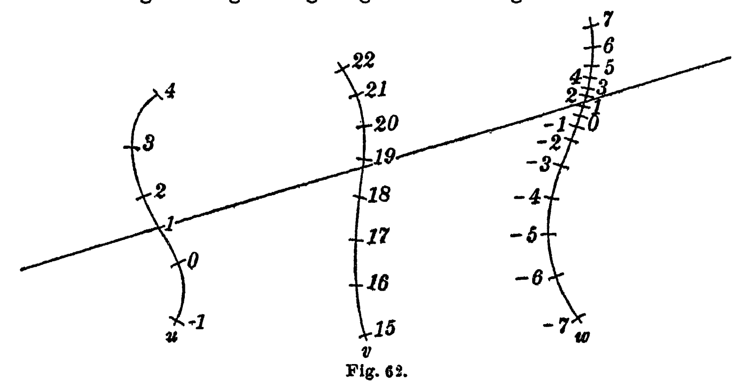


Fig. 62.

bigen Beziehung zwischen drei Veränderlichen abgeben, die andere Methode auf eine gewisse Art von Fällen beschränkt ist. Um diesen Gegenstand näher zu untersuchen wird es nötig sein, die Linienkoordinaten zu erklären.

Beim Festlegen eines Punktes durch rechtwinklige Koordinaten bestimmt, so kann man sagen, x eine einzelne unter einer Schar von Geraden (Parallelen zur Ordinatenachse) und y eine einzelne aus einer anderen Schar von Geraden (Parallelen zur Abszissenachse) und der Punkt wird als Schnittpunkt beider Linien (Fig. 63, I) festgelegt.

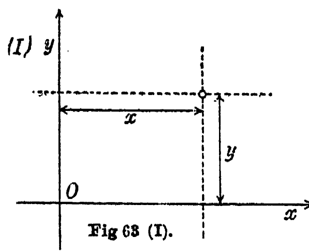


Fig 63 (I).

Ein ähnliches Verfahren kann man anwenden, um eine bestimmte Gerade in einer Ebene festzulegen. Es soll x einen Punkt auf einer festen Geraden so bestimmen, daß die Entfernung des Punktes von einem festen Punkte A auf der Geraden, in einer gewissen Einheit gemessen, gleich x ist, auf einer Seite von A positiv, auf der anderen negativ gerechnet. Ebenso bestimmt y einen Punkt auf einer festen Parallele zu der ersten Geraden so, daß die Entfernung des Punktes, von einem festen Punkte B auf einer Geraden, in derselben Weise wie x gemessen, y beträgt. Die durch beide Punkte hindurchgehende Gerade ist so durch die Werte von x und y bestimmt und für alle möglichen Werte von x und y erhalten wir alle Geraden der Ebene

mit Ausnahme derjenigen, die zu den Geraden, auf denen x und y gemessen werden, parallel laufen. Der Einfachheit halber wählen wir die Punkte A und B so, daß AB zu den beiden Geraden rechtwinklig liegt (Fig. 63, II). Wir nennen x und y die Linienkoordinaten der Verbindungslinie der zwei Punkte x und y in Fig. 63, II; ebenso wie x und y in Fig. 63, I die Punktkoordinaten des Schnittpunktes der Geraden x und y genannt werden.

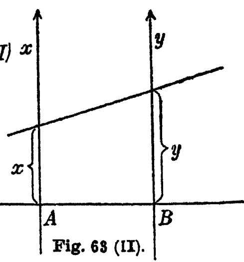


Fig. 63 (II).

Eine lineare Gleichung zwischen Punktkoordinaten

$$y = mx + \mu$$

ist die Gleichung einer Geraden, d. h. alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung genügen, liegen auf einer Geraden. Wenn wir andererseits x und y als Linienkoordinaten ansehen, finden wir den analogen Satz: alle Geraden, deren Linienkoordinaten der Gleichung

$$y = mx + \mu$$

genügen, gehen durch einen gewissen Punkt. Man nennt die Gleichung daher die Gleichung des Punktes in Linienkoordinaten.

Um dies zu erläutern, ziehen wir zuerst die Linie $x = 0$, $y = \mu$ (APO in Fig. 64). Wenn wir nun für einen beliebigen Wert von x $AR = x$ und $PQ = mx$ machen und damit also $y = BQ = mx + \mu$, so muß der Schnittpunkt O von RQ und AP von x unabhängig sein, denn

$$\frac{PO}{AO} = \frac{mx}{x} = m.$$

Das Verhältnis $\frac{PO}{AO}$ bestimmt die Lage von O auf der Geraden AP und, da es von x unabhängig ist, und auch die Lage von AP von x unabhängig ist, so gilt dasselbe für O. Für negative Werte von m haben PO und AO entgegengesetzte Richtungen, so daß O zwischen A und P liegt.

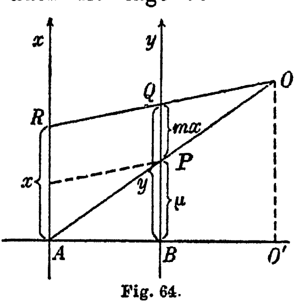


Fig. 64.

Für einen gegebenen Punkt O kann man die entsprechenden Werte m und μ finden, indem man O mit A und dem Punkte verbindet, der im Abstand 1 von A auf der Geraden liegt, auf der x gemessen wird. Sind P und Q die Schnittpunkte dieser Linien mit der Geraden, auf der y gemessen wird, so haben wir $BP = \mu$ und $PQ = m$. Also ergibt jeder beliebige Punkt der Ebene die Gleichung

$$y = mx + \mu,$$

ausgenommen die Punkte der Geraden, auf der x gemessen wird. Für $m = 0$ reduziert sich die Gleichung auf

$$y = \mu,$$

d. h. auf die Gleichung eines Punktes der Linie, auf der y gemessen wird.

Für $y = mx + \mu$ könnte man auch schreiben $x = m'y + \mu'$ und die gleichen Betrachtungen mit vertauschten Rollen von x und y anstellen. Diese Form schließt die Punkte der Geraden, auf der y gemessen wird, nicht ein, dafür aber die Punkte der Geraden, auf der x gemessen wird. Für diese haben wir $m' = 0$.

Die allgemeine Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten ist in der Form

$$ax + by + c = 0$$

gegeben, aus der man jede der oben erwähnten Formen ableiten kann, indem man sie durch a oder b dividiert. Die Teilung durch c ergibt eine andere bequeme Form

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

oder, wenn man schreibt:

$$\frac{-c}{a} = x_0, \quad \frac{-c}{b} = y_0 \qquad \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1,$$

wo x_0 den Schnittpunkt der Geraden BO (Fig. 64) mit der x-Geraden, y_0 den Schnittpunkt der Geraden AO mit der y-Geraden bestimmt.

Eine Kurve läßt sich ausdrücken durch eine Gleichung

$$a_1(u)\,x + b_1(u)\,y + c_1(u) = 0,$$

in welcher $a_1(u)$, $b_1(u)$, $c_1(u)$ Funktionen einer Veränderlichen u sind. Jeder beliebige Wert von u liefert die Gleichung eines gewissen Punktes und mit veränderten Werten von u beschreibt der Punkt die Kurve. Denken wir uns die Kurve gezeichnet und eine Skala der Werte von u in hinreichend geringen Abständen darauf angebracht, um die dazwischen liegenden Werte von u interpolieren zu können. Zwei andere Kurven seien in derselben Weise gegeben durch die Gleichungen

$$a_2(v)\,x + b_2(v)\,y + c_2(v) = 0$$
$$a_3(w)\,x + b_3(w)\,y + c_3(w) = 0$$

und mit Skalen der Werte von v und w versehen.

Nun sind wir in den Stand gesetzt, die Bedingung zu formulieren, die durch die Werte u, v, w erfüllt sein muß, wenn die drei entsprechenden Punkte auf einer Geraden liegen sollen. Wenn x und y die Linienkoordinaten der durch die drei Punkte hindurchgehenden Geraden sind, so müssen x und y gleichzeitig allen drei Gleichungen genügen.

Folglich muß die Determinante der drei Gleichungen verschwinden:

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0$$

und umgekehrt, wenn die Gleichung zwischen u, v, w in diese Form gebracht werden kann, wo a_1, b_1, c_1 beliebige Funktionen von u, ferner a_2, b_2, c_2 beliebige Funktionen von v, und a_3, b_3, c_3 beliebige Funktionen von w sind, so können wir die Gleichungen aufstellen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \quad a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

und sie graphisch durch Kurven darstellen, die Skalen für u, v, w tragen. Die Beziehung zwischen u, v, w ist dann gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die entsprechenden Punkte der drei Kurven auf einer Geraden liegen. Aber es darf nicht vergessen werden, daß nur eine beschränkte Gruppe von Beziehungen in die erforderliche Form gebracht werden kann, so daß die Methode nicht auf jede beliebige Beziehung anwendbar ist.

Die Gleichung eines Punktes

$$ax + by + c = 0$$

behält dieselbe Form, wenn die Längeneinheiten für x und y geändert werden. Wenn x' die Zahl bezeichnet, welche dieselbe Länge wie x, aber in einer anderen Einheit, mißt, müssen die beiden Zahlen x und x' in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, das dem umgekehrten Verhältnis der beiden Maßeinheiten gleich ist. Daher hat man, wenn die Maßeinheiten voneinander unabhängig geändert werden,

$$x = \lambda x', \quad y = \mu y',$$

und die Gleichung des Punktes kann geschrieben werden:

$$a\lambda x' + b\mu y' + c = 0 \quad \text{oder} \quad a' x' + b' y' + c = 0,$$

wo $a' = \lambda a$ und $b' = \mu b$.

Es ist unter Umständen bequemer, die Linienkoordinaten in anderer Weise zu definieren. Bezeichnen wir die in der gleichen Längeneinheit gemessenen rechtwinkligen Koordinaten mit ξ und η, dann kann die Gleichung einer Geraden in der Form

$$\eta = \operatorname{tg}\varphi\ \xi + \eta_0$$

geschrieben werden, wo φ den von der Geraden mit der ξ-Achse gebildeten Winkel und η_0 die Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der η-Achse bezeichnen. Nennen wir nun $\operatorname{tg}\varphi$ und η_0 die Linienkoordinaten der durch die Gleichung dargestellten Geraden und bezeichnen wir sie mit x und y, so bestimmen die Werte von x und y eine gegebene Gerade und jede beliebige Gerade, die der Ordinatenachse nicht parallel ist, kann auf diese Weise bestimmt werden. Die Bedingung, daß eine Gerade x, y durch einen Punkt ξ, η hindurchgehen soll, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\eta = x\xi + y \quad \text{oder} \quad y = -\xi x + \eta.$$

Wenn man für x und y feste Werte annimmt, stellen alle die Werte von ξ, η, die dieser Gleichung genügen, die Punkte einer Geraden x, y dar, und wir nennen daher die Gleichung die Gleichung einer Geraden. Gibt man andererseits ξ und η bestimmte Werte, so stellen alle Werte von x, y, die der Gleichung genügen, die Geraden dar, die durch den gegebenen Punkt ξ, η hindurchgehen, und die Gleichung heißt dann die Gleichung eines Punktes.

Die allgemeine Form

$$ax + by + c = 0$$

kann auch geschrieben werden:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

und ist also die Gleichung des Punktes, dessen rechtwinklige Koordinaten $\xi = \frac{a}{b}$ und $\eta = -\frac{c}{b}$ sind. Der Fall, wo $b = 0$ oder

$$ax + c = 0$$

ergibt die Gleichung eines unendlich weit entfernten Punktes in der durch

$$\operatorname{tg}\varphi = x = -\frac{c}{a}$$

definierten Richtung φ oder der entgegengesetzten Richtung $\varphi + 180^0$.

Alle Geraden, deren Koordinaten x, y der Gleichung

$$ax + c = 0$$

genügen, entsprechen demselben x-Werte, aber einem beliebigen Werte von y, d. h. sie sind alle parallel und alle Geraden dieser Richtung gehören dazu.

Erörtern wir nun einige der Anwendungen von Linienkoordinaten auf die graphische Darstellung von Beziehungen zwischen drei Veränderlichen.

Die Beziehung $$uv = w$$
kann in der Form
$$\log u + \log v = \log w \quad \text{oder} \quad x + y = \log w$$
geschrieben werden, wo
$$x = \log u \quad \text{und} \quad y = \log v.$$
Wir tragen nun x und y als Linienkoordinaten auf zwei parallele Gerade auf, welche Skalen für die u- und v-Werte tragen (Fig. 65). Die Gleichungen $x = \log u$ und $y = \log v$ können als Gleichungen der Punkte dieser beiden Skalen angesehen werden. Die Gleichung
$$x + y = \log w$$
ist für einen beliebigen Wert von w die Gleichung eines Punktes. Dieser ist leicht als Schnittpunkt zweier beliebiger, seiner Gleichung genügender Geraden zu konstruieren, z. B. der Geraden $x = \log w$, $y = 0$ und der Geraden $x = 0$, $y = \log w$. Die erste dieser beiden Geraden erhält man, indem man den Teilstrich $u = w$ auf der u-Skala mit dem Punkte B verbindet, die zweite, indem man den Teilstrich $v = w$ auf der v-Skala mit dem Punkte A verbindet. Wenn die Einheiten von x und y die gleiche Länge haben, wird der Schnittpunkt auf einer Geraden liegen, die genau in der Mitte zwischen den die u- und v-Skalen tragenden Linien liegt und zu ihnen parallel läuft, und die Intervalle der w-Skala werden halb so groß sein, wie die der beiden anderen Skalen (Fig 65).

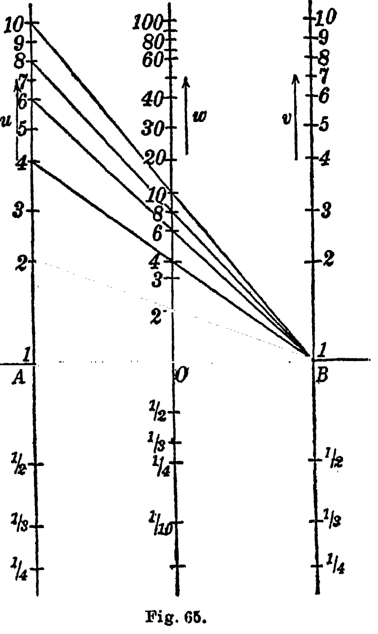


Fig. 65.

Die Beziehung
$$uv = w \quad \text{oder} \quad \log u + \log v = \log w$$
drückt die Bedingung aus, daß den drei Gleichungen
$$x = \log u, \quad y = \log v, \quad x + y = \log w$$
gleichzeitig durch die gleichen Werte von x und y genügt werden kann, das will sagen, daß die drei Punkte auf den u-, v- und w-Skalen,

die den drei Werten von u, v und w entsprechen, auf derselben Geraden x, y liegen.

Die allgemeine Beziehung $u^\alpha v^\beta = w$,

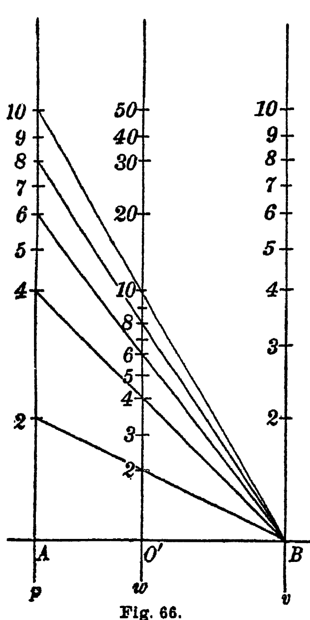


Fig. 66.

wo α und β beliebig gegebene Werte sind, kann ebenso behandelt werden. So können auf diese Weise z. B. Druck und Volumen eines Gases bei adiabatischen Veränderungen dargestellt werden. Man hat in diesem Falle

$$p v^k = w,$$

wo p der Druck, v das Volumen und k und w Konstanten sind.

Für ein gegebenes Gas hat k einen gegebenen Wert, dagegen hängt w von der Größe der betrachteten Gasmenge ab.

Wir schreiben:

$$x = \log p, \quad y = \log v.$$

Dann geht die Gleichung $pv^k = w$ über in die Gleichung $x + ky = \log w$

und stellt einen Punkt dar, den man als den Schnittpunkt zweier beliebiger Geraden x, y konstruieren kann, deren Koordinaten der Gleichung genügen, z. B.

$$x = \log w, \quad y = 0$$

und

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{k} \log w.$$

Die erstere dieser Linien verbindet den Punkt B (Fig. 66) mit dem Teilstrich $p = w$ auf der p-Skala und die zweite verbindet den Punkt A mit dem Punkte der v-Skala, für welchen $y = k \log w$ ist. Ein vom Schnittpunkt auf die Linie AB gefälltes Lot trifft diese im Punkte O' und da das Verhältnis $\frac{AO'}{O'B}$ gleich dem Verhältnis der Abschnitte auf den p- und v-Skalen ist, d. h. gleich $\frac{\log w}{k \log w} = \frac{1}{k}$, so ist es von w unabhängig. Alle den verschiedenen Werten von w entsprechenden Punkte liegen auf derselben Parallele zu den p- und v-Skalen und die w-Skala ergibt sich aus der zentralen Projektion der p-Skala auf diese Parallele mit dem Projektionszentrum B (Fig. 66). Die Ausführung der w-Skala ist übrigens überflüssig,

wenn nur die Gerade gezeichnet wird, die sie trägt. Denn beim Gebrauch des Diagramms geht man meistens von Werten p_0, v_0 aus und sucht andere Werte p, v, für welche

$$pv^k = p_0 v_0^k.$$

Die die Teilstriche p und v verbindende Gerade schneidet die w-Skala in demselben Punkte wie die Verbindungslinie der Teilstriche p_0 und v_0, so daß wir den Wert von $p_0 v_0^k$ nicht zu kennen brauchen. Es genügt, den Schnittpunkt zu bezeichnen, um, wenn v gegeben ist, den Wert von p, oder wenn p gegeben ist, den Wert von v zu finden.

Ein anderes Beispiel liefert die Gleichung

$$w^2 + xw + y = 0.$$

Sieht man x und y als Linienkoordinaten an, so ergibt jeder Wert von w die Gleichung eines Punktes. Man zeichnet die durch diese Punkte gebildete Kurve und versieht sie mit einer Skala der entsprechenden w-Werte. Nun bestimmen je zwei beliebige Werte von x und y eine Gerade, deren Schnittpunkte mit der w-Skala die Wurzeln der Gleichung ergeben. Jeder einzelne Punkt der w-Skala kann als Schnittpunkt zweier Geraden bestimmt werden, deren Koordinaten x, y der Gleichung genügen, z. B.

$$x = 0, \quad y = -w^2 \quad \text{und} \quad x = -w, \quad y = 0.$$[1]

Fig. 67

Auf Fig. 67 ist die Skala für die positiven Werte $w = 0$ bis $w = 2{,}5$ gezeichnet.

Auf dieselbe Weise kann ein Diagramm zur Lösung der kubischen Gleichung

$$w^3 + xw + y = 0$$

1) Für kleine Werte von w ist diese Zusammenstellung ungünstig, weil der Schnittwinkel klein ist. Man kann statt dessen $x = 2$, $y = -w^2 - 2w$ als erste Gerade nehmen.

oder irgend einer beliebigen Gleichung von der Form

$$w^{\lambda} + x w^{\mu} + y = 0$$

entworfen werden.

§ 12. Beziehungen zwischen vier Veränderlichen.

Die Methode kann so verallgemeinert werden, daß sie auch die Beziehungen zwischen vier Veränderlichen umfaßt.

Angenommen, vier Veränderliche u, v, w, t seien untereinander durch die Gleichung

$$g(u, v, w, t) = 0$$

verbunden. Angenommen ferner, daß für irgend einen bestimmten Wert $t = t_0$ die resultierende Beziehung zwischen u, v, w durch ein Diagramm der oben betrachteten Art, drei Kurven mit Skalen für u, v, w, ausgedrückt werden kann, und daß für andere Werte von t die u- und v-Skalen unverändert bleiben, während die w-Skala sich ändert. Dann hat man, den verschiedenen Werten von t entsprechend, eine Schar von w-Skalen. Verbindet man nun die den gleichen Werten von w entsprechenden Punkte, so erhält man ein aus Kurven $t = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ gebildetes Netz (Fig. 68). Beliebige Wertepaare u, v liefern Gerade, die dieses Netz schneiden. Die Schnittpunkte entsprechen den Werten von t und w, die der gegebenen Gleichung genügen.

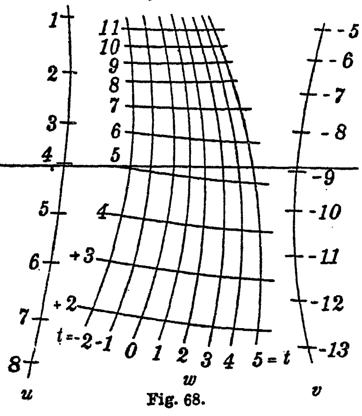


Fig. 68.

Jede beliebige Beziehung von der Form

$$\varphi(u) f(t, w) + \psi(v) g(t, w) + h(t, w) = 0,$$

wo $\varphi(u)$ eine beliebige Funktion von u, $\psi(v)$ eine beliebige Funktion von v, und $f(t, w)$, $g(t, w)$, $h(t, w)$ beliebige Funktionen von t und w bedeuten, kann auf diese Art dargestellt werden.

Man braucht für diesen Fall nur die Linienkoordinaten x, y einzuführen, indem man

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v)$$

schreibt und erhält so eine lineare Gleichung zwischen x und y:

$$f(t, w)x + g(t, w)y + h(t, w) = 0,$$

welche für jedes gegebene Wertepaar von t und w die Gleichung eines Punktes darstellt. Für einen gegebenen Wert von t und veränderliche Werte von w erhält man eine Kurve $t = \text{const.}$ mit einer Skala für w und für eine Reihe von t-Werten eine Kurvenschar $t = \text{const.}$ Ebenso liefert die Gleichung für einen gegebenen Wert von w und veränderliche t-Werte eine Kurve $w = \text{const.}$ mit einer Skala für t und eine Reihe von w-Werten ergibt eine Kurvenschar $w = \text{const.}$ Aus beliebigen gegebenen Werten von u und v berechnet man die Linienkoordinaten x und y, und die Punkte, wo diese durch x und y definierte Gerade das Netz der Kurven $t = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ schneidet, liefern die Werte t und w, die mit den gegebenen Werten für u und v zusammen der Beziehung genügen. Als Beispiel mag die Beziehung zwischen der Höhe, dem Azimut und der Deklination eines Himmelskörpers und der Breite des Beobachters dienen. Es seien h, a, δ, die Höhe, das Azimut und die Deklination und φ die Breite. Die Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$, $\frac{\pi}{2} - h$, $\frac{\pi}{2} - \delta$ sind die drei Seiten des sphärischen Dreiecks PZS (Fig. 69), das von dem Pol P, dem Zenit Z und dem Himmelskörper S gebildet wird. Das Azimut ist als Supplementwinkel des Winkels PZS definiert.

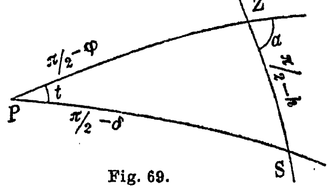


Fig. 69.

Die Gleichung ist

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a.$$

Schreiben wir $\quad x = \cos a, \quad y = \sin \delta,$

so lautet die Gleichung

$$y = \sin \varphi \sin h - x \cos \varphi \cos h.$$

Wir wollen uns in diesem Falle des zweiten Systems von Linienkoordinaten bedienen, wo x die durch die Tangente des mit der Abszissenachse gebildeten Winkels gemessene Neigung der Geraden und y die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Ordinatenachse ist. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes mit ξ, η, so bekommt die Gleichung der Punkte die Form

$$\eta = x\xi + y \quad \text{oder} \quad y = \eta - \xi x,$$

so daß in unserem Falle

$$\xi = \cos \varphi \cos h, \quad \eta = \sin \varphi \sin h$$

ist. Mit Hilfe dieser Formeln kann man die Kurven $\varphi = \text{const.}$ und

$h =$ const. zeichnen. Es ist leicht zu erkennen, daß es Ellipsen sind, und daß die Kurven $\varphi =$ const. dieselben sind, wie die Kurven $h =$ const. Für einen bestimmten φ-Wert und einen veränderlichen h-Wert bekommen wir

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \varphi} = 1$$

und für einen bestimmten h-Wert und einen veränderlichen φ-Wert

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 h} + \frac{\eta^2}{\sin^2 h} = 1 .$$

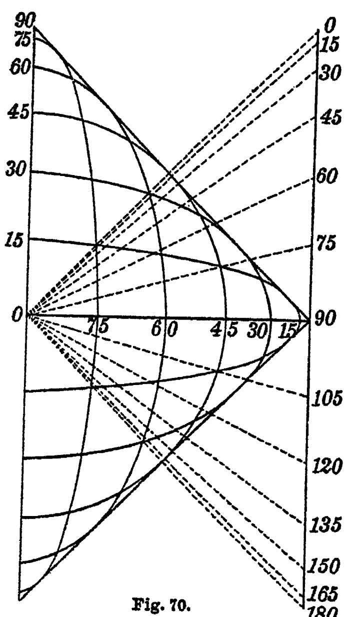


Fig. 70.

Jede der Ellipsen schneidet alle anderen, und sie bilden auf diese Weise ein Netz. Ein Schnittpunkt der Ellipse $\varphi = c_1$ mit der Ellipse $h = c_2$ entspricht auch den Werten $h = c_1$ und $\varphi = c_2$, da die Ellipse $\varphi = c_1$ mit der Ellipse $h = c_1$ identisch und die Ellipse $\varphi = c_2$ mit $h = c_2$ identisch sind (Fig. 70). Die einfachste Art dieses Netz zu zeichnen, besteht darin, die Geraden

$$\xi + \eta = \cos(\varphi - h)$$

und rechtwinklig zu ihnen die Geraden

$$\xi - \eta = \cos(\varphi + h)$$

für äquidistante Werte von $\varphi + h$ und $\varphi - h$ zu ziehen. Die Ellipsen laufen diagonal durch die von den beiden Systemen von Geraden gebildeten rechteckigen Felder. Die Skalen für φ und h, welche beide für beide Veränderliche Geltung haben, werden auf den Koordinatenachsen aufgetragen. Die δ-Skala wird auf der Ordinatenachse angebracht, und ist mit den φ- und h-Skalen auf dieser Achse identisch, denn die einem gegebenen Werte $\delta = c$ entsprechende Ordinate ist $\sin c$ und dies ist auch die Ordinate desjenigen Punktes, an dem die Ellipse $\varphi = c$ oder $h = c$ die Ordinatenachse schneidet. Die Skala für das Azimut kann nicht ganz in derselben Weise wie die für φ, h und δ angelegt werden, weil $\cos a$ die Neigung der Geraden x, y bestimmt. Man ziehe eine Parallele zur Ordinatenachse durch den Punkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ und trage darauf eine Skala für das Azimut auf, indem man $\eta = \cos(a)$ macht (Fig. 70). Eine den Nullpunkt mit einem beliebigen Teilstrich dieser Skala verbindende Gerade hat die

Neigung der Geraden $x = \cos a$, $y = \sin \delta$. Um sie mit der Geraden x, y zur Deckung zu bringen, muß sie sich selbst parallel verschoben werden, bis ihr Schnittpunkt mit der Ordinatenachse mit dem Teilstrich δ zusammenfällt. Dies führt auf eine andere Art das Diagramm zu benutzen. Man zeichne ein Strahlenbüschel vom Nullpunkt nach den Teilstrichen der Azimutskala (Fig. 70) und führe diese Zeichnung auf durchsichtigem Papier aus, welches man auf die Zeichnung der Ellipsen legt. Für einen beliebigen Wert von δ verschiebt man es, sei es nach oben oder nach unten, so, daß das Zentrum des Strahlenbüschels auf den Teilstrich δ zu liegen kommt. Solange der Himmelskörper seine Deklination nicht wesentlich ändert, setzt uns das Diagramm in dieser Lage in den Stand jeden der drei Werte φ, h, a aus den beiden anderen zu ermitteln.

Als zweites Beispiel diene die Beziehung zwischen der Deklination δ, dem Azimut a und dem Stundenwinkel t eines Himmelskörpers und der Breite φ des Beobachters.

Diese Beziehung findet man, indem man die Höhe h aus der Gleichung
$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$
wegschafft. Zu diesem Zwecke drückt man $\sin h$ und $\cos h$ durch die anderen Winkel δ, t, a, φ aus und setzt diese Ausdrücke an Stelle von $\sin h$ und $\cos h$ in die Gleichung ein.

Wir haben
$$\cos h = \cos \delta \frac{\sin t}{\sin a}, \quad \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$
Setzt man diese Werte ein, so erhält man:
$$\sin \delta = \sin^2 \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \cos \delta \sin t \operatorname{ctg} a$$
oder $\quad \cos^2 \varphi \sin \delta = \sin \varphi \cos \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \cos \delta \sin t \operatorname{ctg} a.$

Durch Division mit $\cos^2 \varphi \cos \delta$ erhält man schließlich
$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos t - \frac{\sin t}{\cos \varphi} \operatorname{ctg} a.$$
Um diese Beziehung graphisch darzustellen, führt man die Linienkoordinaten
$$x = \operatorname{ctg} a \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tg} \delta$$
ein und erhält
$$y = \operatorname{tg} \varphi \cos t - \frac{\sin t}{\cos \varphi} x.$$
Bedienen wir uns des zweiten Systems von Linienkoordinaten. Die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η des durch die Gleichung ausgedrückten Punktes ergeben sich danach als

$$\xi = \frac{\sin t}{\cos \varphi}, \qquad \eta = \operatorname{tg} \varphi \cos t.$$

Die Kurven $\varphi = \text{const.}$ sind Ellipsen, $\cos^2\varphi\,\xi^2 + \frac{\eta^2}{\operatorname{tg}^2\varphi} = 1.$

Die Kurven $t = \text{const.}$ sind Hyperbeln $\frac{\xi^2}{\sin^2 t} - \frac{\eta^2}{\cos^2 t} = 1.$

Die Ellipsen und Hyperbeln sind konfokal; die Brennpunkte fallen in die Punkte $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$, so daß die Kurven sich rechtwinklig schneiden.

Die Skala für φ kann auf der Ordinatenachse an den Punkten, wo sie die Ellipsen schneidet, aufgetragen werden. Sie ist mit der Skala für δ identisch, da in beiden Fällen die Ordinate die Tangente des Winkels ist, mit dem einzigen Unterschiede, daß δ auf dem negativen Teil der Achse negativ ist und φ nicht. Die t-Skala kann auf einer der dem höchsten in Betracht kommenden φ-Werte entsprechenden Ellipsen aufgetragen werden. Diese Ellipse bildet dann die Grenze der Zeichnung, so daß höhere φ-Werte nicht dargestellt sind. Dem Azimut entsprechend zeichnet man ein Strahlenbüschel auf durchsichtiges Papier, welches man auf die Zeichnung der Kurven legt. Das Zentrum des Strahlenbüschels wird auf den Teilstrich δ gelegt, und das Azimut ist gleich den von den Strahlen mit der positiven Richtung der Ordinatenachse gebildeten Winkeln (Fig. 71). Es genügt, wenn man die Kurven und die Strahlen nur auf einer Seite der Ordinatenachse zeichnet. An dem Scheitelpunkte der Hyperbeln ändert sich der Wert von t plötzlich. Die Linie $t = 6^h$ ist vom Brennpunkt $\xi = 1$, $\eta = 0$ ausgehend gedacht. Wenn das Zentrum des Strahlenbüschels im Nullpunkt liegt, fallen die Strahlen mit den Asymptoten der Hyperbeln zusammen; $a = 15^0$ entspricht $t = 1^h$, $a = 30^0$ $t = 2^h$ usw

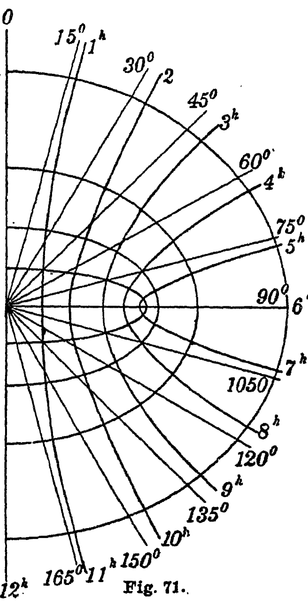


Fig. 71.

Drittes Kapitel.

Die graphischen Methoden der Differential- und Integralrechnung.

§ 13. Graphische Integration.

Im vorhergehenden haben wir gezeigt, wie sich die elementaren mathematischen Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division und ihr Gegenstück, die Ermittelung der Wurzeln einer Gleichung, auf graphischem Wege ausführen lassen, und wie Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher graphisch dargestellt und behandelt werden können. Aber die graphischen Methoden würden der allgemeinen Bedeutung entbehren und nur von sehr beschränktem Nutzen sein, wenn sie sich nicht auch auf die infinitesimalen Operationen der Differentiation und Integration anwenden ließen Ja, gerade hier zeigt sich erst ihr voller Wert. Denn bei Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf naturwissenschaftliche und technische Probleme sind die betreffenden Funktionen oft nur graphisch gegeben, während ihr eigentlicher analytischer Ausdruck unbekannt ist. Man kann sie durch analytische Ausdrücke annähern. Aber die Berechnung und Behandlung der Annäherungen wäre in vielen Fällen weitläufig und unbequem. In solchen Fällen ist es von der allergrößten Wichtigkeit, daß man die Operationen der Infinitesimalrechnung ausführen kann, obgleich die Funktionen nur graphisch gegeben sind.

Beginnen wir mit der Integration, weil sie leichter und allgemeiner anwendbar ist als die Differentiation.

Denken wir uns eine Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve gegeben, deren Ordinate y und deren Abszisse x ist. Es gilt eine Kurve zu finden, deren Ordinate Y ein Integral der Funktion $f(x)$ ist

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Wir wollen die Längeneinheit der Abszissen von der der Ordinaten unabhängig festsetzen Der Wert von Y mißt den Inhalt der Fläche, die von den a und x entsprechenden Ordinaten der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse begrenzt wird, wobei das von den Längeneinheiten von x und y gebildete Rechteck als Flächeneinheit zu Grunde gelegt ist.

In dem einfachen Falle, wo $f(x)$ eine Konstante ist, wird die Gleichung $y = f(x) = c$ durch eine Parallele zur x-Achse dargestellt und

$$Y = \int_a^x c\,dx = c(x - a).$$

Y ist die Ordinate einer Geraden, die die x-Achse im Punkte $x = a$ schneidet. Die Konstante c ist die Veränderung von Y für einen Zuwachs 1 des Wertes von x. Ist P der Punkt der x-Achse, wo $x = -1$, und Q der Punkt, wo die Gerade $y = c$ die Ordinatenachse schneidet (Fig. 72), so ist die gesuchte Gerade eine Parallele zu PQ. Man konstruiert sie, indem man durch den Punkt $x = a$ der x-Achse (Fig. 72, wo $a = 0$) eine Parallele zu PQ zieht.

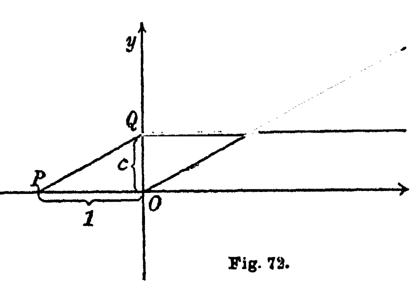


Fig. 72.

Die Addition eines gegebenen Wertes c_1, welche der Gleichung die Form

$$Y = c(x - a) + c_1$$

gibt, ist gleichbedeutend mit einer Verschiebung der Geraden um den Betrag c_1 in der Richtung der Ordinatenachse. Für $x = a$ hat man dann $Y = c_1$, so daß man die Gerade

$$Y = c(x - a) + c_1$$

erhält, indem man eine Parallele zu PQ durch den Punkt $x = a$, $y = c_1$ legt.

Als zweiten Fall wollen wir annehmen, daß die Kurve $y = f(x)$ aus einer Anzahl von Absätzen besteht, d. h. daß die Funktion in gewissen Zwischenräumen $x = x_1$ bis x_2, x_2 bis x_3 usw. verschiedene konstante Werte annimmt, die sich bei x_2, x_3 usw. plötzlich verändern. Bei der das Integral

$$Y = \int_{x_1}^x f(x)\,dx$$

darstellenden Kurve ändert sich die Ordinate nicht plötzlich. Die Kurve besteht in einer stetigen gebrochenen Linie, deren Ecken die Abszissen x_2, x_3, usw. haben. Die Richtungen der einzelnen Absätze findet man auf die eben beschriebene Weise, mit Hilfe des von P ausgehenden Strahlenbüschels nach den Punkten α, β, γ, usw. (Fig. 73), wo die Horizontalen die Ordinatenachse schneiden. Um diese gebrochene Linie zu konstruieren, zeichnet man eine Parallele zu $P\alpha$

durch den Punkt $x = x_1$ (in Fig. 73 ist $x_1 = 0$) bis zu der Senkrechten $x = x_2$. Durch ihren Schnittpunkt mit der Senkrechten $x = x_2$ wird eine Parallele zu $P\beta$ bis zur Senkrechten $x = x_3$ und durch deren Schnittpunkt mit der Senkrechten $x = x_3$ eine Parallele zu $P\gamma$ gezogen und so fort.

Schließlich wollen wir den Fall einer frei gewählten, durch eine

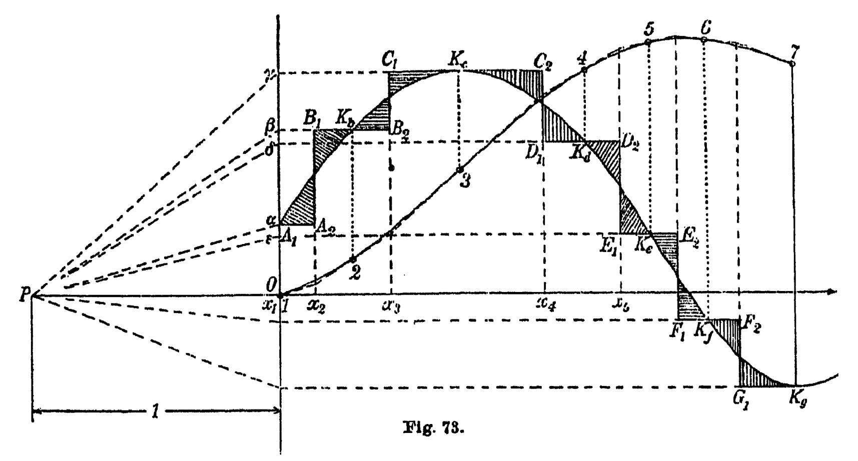


Fig. 73.

beliebige Kurve dargestellten Funktion $y = f(x)$ betrachten. Um die Kurve

$$Y = \int_a^x f(x)\, d\, x$$

zu finden, setzen wir an Stelle von $y = f(x)$ eine Funktion, die aus verschiedenen konstanten Werten in verschiedenen Absätzen besteht, und deren Wert sich plötzlich ändert, wenn x von einem Absatz in den nächsten übergeht, so daß die die Funktion darstellende Linie eine Reihe von Stufen bildet, die je nach der Abnahme oder Zunahme von $f(x)$ nach unten oder oben führen. Diese Stufen sind in folgender Weise angeordnet. Der horizontale Teil $A_1 A_2$ der ersten Stufe (Fig. 73) geht von einem beliebigen Punkte A_1 der gegebenen Kurve aus. Der senkrechte Teil $A_2 B_1$ und das nächstfolgende horizontale Stück $B_1 B_2$ werden dann so gezeichnet, daß $B_1 B_2$ die Kurve schneidet und daß das Integral der gegebenen Kurve bis zum Schnittpunkt K_b dem Integral der Stufenlinie bis zu demselben Punkte gleich ist, d. h. der Inhalt der von der gegebenen und der Stufenkurve begrenzten Fläche muß auf beiden Seiten des senkrechten Stückes $A_2 B_1$

gleich sein. Wenn über K_b verfügt ist, kann die richtige Lage von $A_2 B_1$ leicht nach Augenmaß mit hinreichender Genauigkeit angegeben werden. Das Auge ist für Größenunterschiede kleiner Flächen recht empfindlich. Zudem vergrößert jede Verschiebung von $A_2 B_1$ nach rechts oder links den einen und verringert gleichzeitig den anderen Flächenteil, so daß sich schon eine geringe Abweichung von der richtigen Lage bemerkbar macht. Ebenso wird das senkrechte Stück $B_2 C_1$ der nächsten Stufe $B_2 C_1 C_2$ so gelegt, daß die Flächen auf beiden Seiten einander gleich sind. Das Integral der gegebenen Kurve bis zum Punkte K_c wird dann wieder den gleichen Wert haben wie das Integral der Stufenlinie bis K_c und so auch bei den übrigen Stufen. Das Integral der Stufenlinie konstruiert man auf die oben beschriebene Weise. Es wird dargestellt durch eine gebrochene Linie, die vom Fußpunkte der Ordinate von A_1 ausgeht. Die Ecken liegen auf den senkrechten Absätzen, oder ihren Verlängerungen. Es ist leicht einzusehen, daß sich die gebrochene Linie aus einer Reihe von Tangenten der Integralkurve

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx$$ [1]

zusammensetzt, deren Berührungspunkte auf denselben Senkrechten liegen wie die Punkte A_1, K_b, K_c usw. (In Fig. 73 sind diese Punkte mit 0, 2, 3, . . . bezeichnet). Daß diese Punkte auf der Integralkurve liegen, folgt aus der Anordnung der Absätze, nach welcher das Integral der gegebenen Funktion in K_b, K_c, . . . gleich dem Integral der Stufenlinie ist. Nun stimmen in den Punkten $A_1 K_b K_c \ldots$ die Ordinaten der gegebenen Kurve mit denen der Stufenlinie überein; daher müssen beide Integrallinien für diese Abszissen dieselbe Richtung haben.

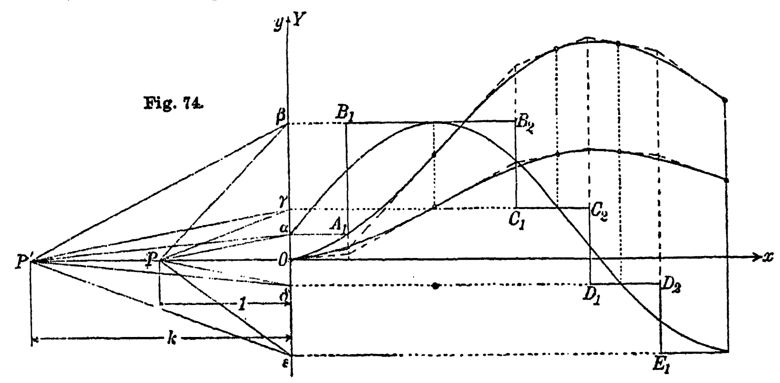
Nachdem man die gebrochene Linie konstruiert und die Punkte 2, 3, 4 . . . (Fig. 73) bezeichnet hat, zeichnet man aus freier Hand oder mit Hilfe eines Kurvenlineals die Integralkurve so, daß sie die gebrochene Linie in den Punkten 0, 2, 3 . . . berührt. Da die gegebene Kurve ihre Ordinate nicht plötzlich ändert, ändert die Integralkurve ihre Richtung nirgends plötzlich. Die Zeichnung zeigt, wie genau die Integralkurve durch die gebrochene Linie bestimmt ist. Es gibt tatsächlich keine Möglichkeit, die Kurve merklich anders zu legen, ohne die Bedingungen zu verletzen.

Die Ordinate der Integralkurve ist hier in derselben Einheit ge-

---

1) In Fig. 73 ist die untere Grenze 0.

messen wie die Ordinate der gegebenen Kurve $y = f(x)$. Es kann mitunter bequem sein die Ordinaten der Integralkurve in einem anderen Maßstabe zu zeichnen als die Ordinaten der gegebenen Kurve. Der Wert des Integrals kann z. B. so groß werden, daß die Ordinaten der Integralkurve über die Dimension des Zeichenbrettes hinausreichen würden, oder so klein, daß ihre Änderungen nicht mit ausreichender Genauigkeit meßbar wären. Im ersteren Falle verkleinert, im letzteren vergrößert man den Maßstab. Dies geschieht, indem man den Punkt P, den Ausgangspunkt des Strahlenbüschels, das die Richtung der gebrochenen Linie bestimmt, verlegt. Wenn P dem Nullpunkt näher gerückt wird, werden die Richtungen $P\alpha$, $P\beta$, ... steiler, und zwar gerade so viel wie wenn, bei unveränderter Lage



von P, die Ordinaten der horizontalen Teile A_1A_2, B_1B_2, ... in demselben Verhältnis der beiden Entfernungen PO vergrößert würden. Daher werden durch eine Verkleinerung der Entfernung PO die Ordinaten der sich ergebenden gebrochenen Linie im umgekehrten Verhältnis vergrößert. Umgekehrt werden durch Vergrößerung der Entfernung PO die Ordinaten der sich ergebenden gebrochenen Linie im umgekehrten Verhältnis der Entfernungen verkleinert, weil die Richtungen $P\alpha, P\beta$, ... sich durch Verlängerung der Entfernung PO in derselben Weise verändern wie wenn die Ordinaten von A_1A_2, B_1B_2, ... im umgekehrten Verhältnis verkleinert wären. Die auf Grund der längeren Entfernung $P'O$ konstruierte gebrochene Linie wird daher dieselbe sein, wie sie sich ergeben würde, wenn die Ordinaten der Stufenlinie verkleinert würden, und führt daher auf eine Integralkurve, deren Ordinaten im gleichen Verhältnis kleiner sind (Fig. 74).

Diese Art der graphischen Integration von

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx$$

ist nicht auf die Werte $x > a$ beschränkt. Die Methode ist ebenso gut auf die Fortsetzung der Integralkurve für $x < a$ anwendbar, die Stufen müssen nur dann von rechts nach links laufend gezeichnet werden. Die untere Grenze a bestimmt den Punkt, wo die Integralkurve die x-Achse schneidet.

Es gibt eine Methode zur Konstruktion der senkrechten Absätze der Stufenlinie, die in manchen Fällen nützlich sein kann, obgleich man in der Regel ohne sie auskommt und einfach nach Augenmaß zeichnet. Es seien A und B (Fig. 75) zwei benachbarte Schnittpunkte der Kurve mit horizontalen Abschnitten der Stufenlinie; das zwischen A und B liegende Stück der Kurve sei ein Stück einer Parabel, deren Achse der x-Achse parallel ist. Die Lage des senkrechten Abschnitts der Stufe zwischen A und B ist dann durch eine einfache Konstruktion bestimmbar. Man lege durch den Halbierungspunkt C der Sehne AB (Fig. 75) eine Parallele CD zur x-Achse, welche die Parabel in D schneidet. Der senkrechte Teil der Stufe EH schneidet CD in einem Punkte zwischen C und D, dessen Entfernung von C doppelt so groß ist wie seine Entfernung von D. Daß dies die richtige Lage von EH sein muß, folgt, wenn bewiesen werden kann, daß der Flächeninhalt von $ADBGA$ gleich dem des Rechtecks $EHBG$ ist. Die Fläche $ADBGA$ zerfällt in zwei Teile: das Dreieck ABG und die von der Kurve und der Sehne eingeschlossene Fläche $ADBCA$. Das Dreieck ist gleich dem Rechteck $FJBG$, während $ADBCA$ gleich zwei Dritteln des Parallelogramms $MNBA$ und daher gleich dem Rechteck $EHJF$ ist. Zusammen sind sie also gleich dem Rechteck $EHBG$ und die von Stufenlinie und Kurve eingeschlossenen Flächen auf beiden Seiten von EH sind daher inhaltsgleich.

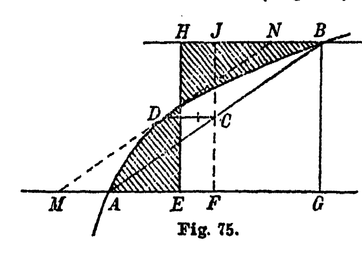


Fig. 75.

Nimmt man die Kurve zwischen A und B als Stück einer Parabel an, deren Achse mit der Ordinatenachse parallel ist, so muß die Konstruktion etwas verändert werden. Durch den Halbierungspunkt C der Sehne AB (Fig. 76) lege man eine Senkrechte, deren Schnittpunkt mit der Parabel D sei. Auf CD suche man den Punkt K zwischen C und D, dessen Entfernung von C doppelt so groß ist wie die von D und lege durch ihn eine Parallele zur Sehne AB.

Die Parallele schneidet eine durch C gelegte Horizontale im Punkte L.

Dann muß EH durch L gehen, wie sich folgendermaßen beweisen läßt. Der Inhalt der von der Parabel ADB und der Sehne AB begrenzten Fläche ist gleich zwei Dritteln des Flächeninhaltes von $MNBA$, wenn MN die Tangente der Parabel im Punkte D ist. Nennen wir den Schnittpunkt von NM mit der durch C laufenden Horizontalen D', so haben wir offenbar

$$CL = \tfrac{2}{3} CD'$$

Also ist das Rechteck $EHJF$ der von Parabel und Sehne begrenzten Fläche inhaltsgleich und $EHBG$ ist inhaltsgleich $ADBGA$.

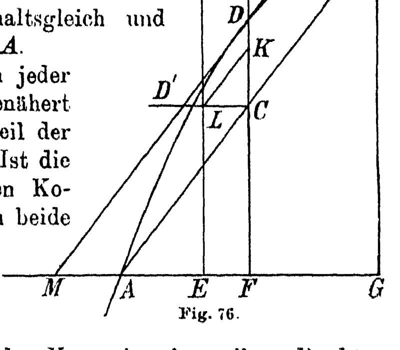


Fig. 76.

Jede beliebige Kurve kann an jeder Stelle durch ein Parabelstück angenähert werden, wenn der anzunähernde Teil der Kurve klein genug gewählt wird. Ist die Richtung der Kurve nirgends den Koordinatenachsen parallel, so können beide Arten von Parabeln als Annäherung verwendet werden, sowohl die, deren Achsen der x-Achse, wie die deren Achsen der y-Achse parallel sind. Ist aber die Richtung der Kurve in einem ihrer Punkte horizontal (Fig. 76), dann können nur die Parabeln mit senkrechter Achse, und ist sie in einem Punkte vertikal, nur die mit horizontaler Achse benutzt werden. Jenachdem muß also die eine oder die andere Konstruktion gewählt werden, um die Lage des senkrechten Stufenabsatzes zu bestimmen.

Man zeichne die Stufen nicht zu klein. Obgleich man dadurch den Unterschied zwischen der gebrochenen Linie und der Integralkurve verkleinern würde, so erwächst aus der größeren Anzahl von Ecken der gebrochenen Linie die Gefahr der Summierung von kleinen Zeichenfehlern, die an den Ecken nicht ganz zu vermeiden sind. Nur die praktische Erfahrung lehrt die der Methode angemessenste Stufengröße zu finden.

Statische Momente von Flächen können durch doppelte Integration gefunden werden. Betrachten wir die von der Kurve $y = f(x)$ (Fig. 77), der x-Achse und den Ordinaten $x = 0$ und $x = \xi$ begrenzte Fläche. Das statische Moment mit Bezug auf die durch $x = \xi$ ge-

legte Senkrechte ist das Integral der Produkte jeden Elements $y\,dx$ und seiner Entfernung $\xi - x$ von der Senkrechten

$$M = \int_0^\xi (\xi - x)\,y\,dx.$$

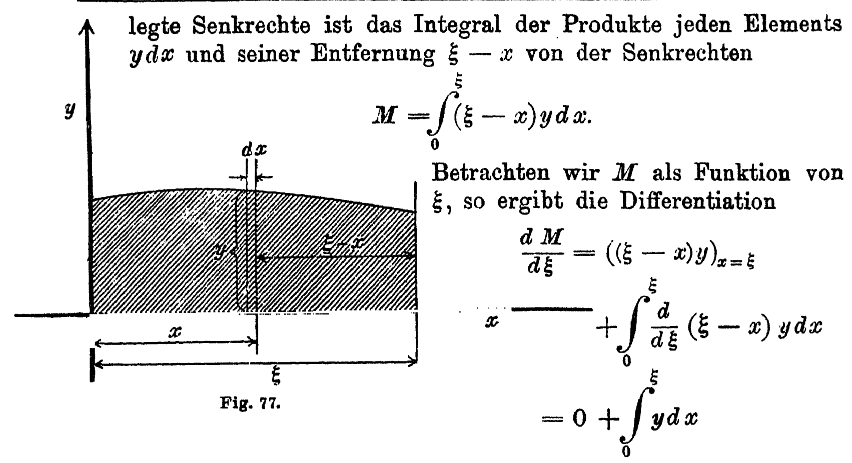


Fig. 77.

Betrachten wir M als Funktion von ξ, so ergibt die Differentiation

$$\frac{dM}{d\xi} = ((\xi - x)y)_{x=\xi} + \int_0^\xi \frac{d}{d\xi}(\xi - x)\,y\,dx$$

$$= 0 + \int_0^\xi y\,dx$$

Man erkennt also, daß eine graphische Integration der in $x = 0$ anfangenden Kurve $y = f(x)$ die Kurve liefert, deren Ordinate $\frac{dM}{d\xi}$ ist. Daher wird eine zweite Integration dieser letzteren Kurve die Kurve M als Funktion von ξ ergeben. Da M für $\xi = 0$ verschwindet, muß die zweite Integration auch bei der Abszisse $x = 0$ anfangen.

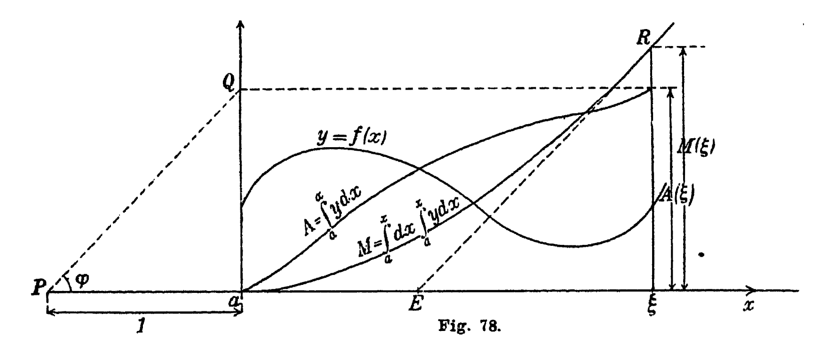


Fig. 78.

Fig. 78 zeigt ein Beispiel. Jede Ordinate der durch die zweite Integration gefundenen Kurve ist das statische Moment der auf ihrer linken Seite liegenden Fläche mit Bezug auf die Vertikale durch dieselbe Ordinate. Die am weitesten nach rechts liegende Ordinate ist das statische Moment der ganzen Fläche mit Bezug auf die rechtsliegende Vertikale. Das statische Moment der ganzen Fläche mit Be-

zug auf eine Vertikale durch einen beliebigen Punkt x_1 ist das Integral

$$\int_a^\xi (x_1 - x)\, y\, dx.$$

Betrachtet man es als Funktion von x_1, so ist sein Differentialkoeffizient

$$\int_a^\xi \frac{d}{d x_1} (x_1 - x) y\, dx = \int_a^\xi y\, dx.$$

Das besagt, daß der Differentialkoeffizient von x_1 unabhängig und also das statische Moment durch eine Gerade dargestellt ist. Da sein Differentialkoeffizient durch die Horizontale durch den letzten Punkt rechts auf der Kurve

$$\int_a^x y\, dx$$

dargestellt ist, findet man die Richtung der Geraden, indem man eine Linie durch den Punkt P und den Schnittpunkt Q der Horizontalen mit der Ordinatenachse zieht (Fig. 78). Die Lage der Geraden ist dann bestimmt durch die Bedingung, daß

$$\int_a^\xi (x_1 - x)\, y\, dx$$

für $x_1 = \xi$ dem statischen Moment

$$M(\xi) = \int_a^\xi (\xi - x)\, y\, dx$$

gleich ist, man braucht daher nur durch den letzten Punkt R der durch die zweite Integration gefundenen Kurve für $M(\xi)$ eine Parallele zu PQ zu ziehen. Die Ordinaten dieser Geraden für eine beliebige Abszisse x_1 stellen die Werte von

$$\int_a^\xi (x_1 - x)\, y\, dx$$

in der Längeneinheit der Ordinaten gemessen, dar. Der Schnittpunkt E mit der x-Achse bestimmt die Lage der Senkrechten, in Bezug auf welche das statische Moment gleich Null ist, d. h. der durch den Schwerpunkt führenden Senkrechten.

Das Trägheitsmoment der Fläche

$$\int_0^\xi y\,dx$$

in Bezug auf die Achse $x = \xi$ läßt sich auf dieselbe Art ermitteln. Es wird ausgedrückt durch das Integral

$$T = \int_0^\xi (\xi - x)^2 y\,dx.$$

Betrachtet man es als Funktion von ξ, so ergibt die Differentiation

$$\frac{dT}{d\xi} = [(\xi - x)^2 y]_{x=\xi} + \int_0^\xi \frac{d}{d\xi}(\xi - x)^2 y\,dx = 2\int_0^\xi (\xi - x) y\,dx$$

d. h. der Differentialkoeffizient ist zweimal so groß wie das statische Moment in Bezug auf dieselbe Achse. Dies gilt für jeden Wert von ξ. Man erhält also durch Integration der Kurve für $M(\xi)$ den Wert $\frac{1}{2}T$ als Funktion von ξ. Für $\xi = 0$ hat man $T = 0$, so daß die Kurve auf der x-Achse in $\xi = 0$ anfängt.

Das Integral

$$\int_a^x y\,dx$$

ist Null für $x = a$. Die das Integral darstellende Kurve muß die x-Achse in $x = a$ schneiden (wobei Werte $x > a$ und $x < a$ zugelassen sind) und von diesem Punkte ausgehend konstruiert man die gebrochene Linie. Läßt man sie statt dessen vom Punkte $x = a$, $y = c$ ausgehen, so ist der einzige Unterschied, daß die ganze Integralkurve parallel zur Ordinatenachse um einen Betrag c nach oben, wenn c positiv, und nach unten, wenn c negativ ist, verschoben wird; die Form der Kurve aber bleibt unverändert. Etwas anderes ist es, wenn die Kurve zum zweiten Mal integriert wird. Denn statt

$$\int_a^x y\,dx \quad \text{integriert man nun} \quad \int_a^x y\,dx + c.$$

Die Ordinate der Integralkurve wird daher um einen Betrag $= c(x - a)$ verändert, und wenn zudem die zweite Integralkurve in $x = a$, $y = c_1$ anstatt in $x = a$, $y = 0$ anfängt, so beträgt die Veränderung

$$c(x - a) + c_1,$$

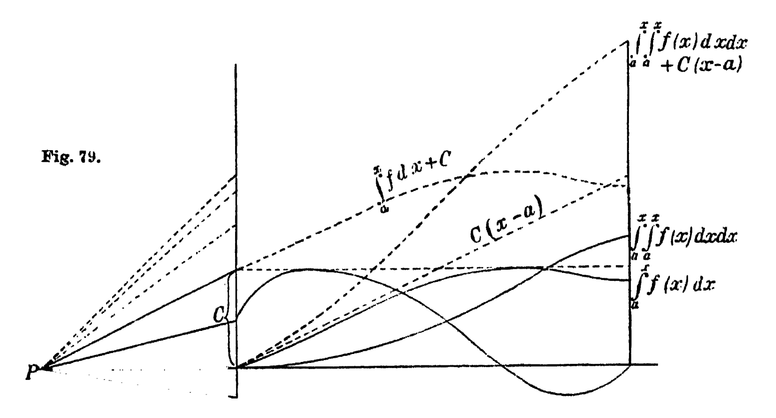
so daß die Differenz zwischen den Ordinaten der neuen Integralkurve und den Ordinaten der Geraden

$$y = c(x - a) + c_1$$

den Ordinaten der ersten Integralkurve (Fig. 79) gleich wird.

Diese Wirkung der Hinzuaddierung einer linearen Funktion zu den Ordinaten der Integralkurve wird ebenfalls erreicht durch ein Verschieben des Pols P nach oben oder unten. Denn es kommt offenbar auf dasselbe hinaus, ob die zu integrierende Kurve um den Betrag c nach oben oder ob der Punkt P um denselben Betrag nach unten verschoben wird, so daß die gegenseitige Lage von P und der zu integrierenden Kurve zu einander dieselbe ist wie vorher. Eine

Fig. 79.



Veränderung der Ordinate von P um $-c$ verändert die Ordinaten der Integralkurve um $c(x-a)$. $c(x-a)$ ist die Ordinate einer zu der Verbindungslinie von dem neuen P mit dem Nullpunkt parallelen Geraden.

Durch dieses Verfahren, die Verschiebung von P nach oben oder unten, gelingt es mitunter die Integralkurve ohne Verkleinerung des Maßstabes der Ordinaten innerhalb der Dimensionen des Reißbretts zu behalten. Eine gute Regel ist, die Ordinate von P etwa gleich der mittleren Ordinate der zu integrierenden Kurve zu wählen. Die Ordinaten der Integralkurve werden dann an beiden Enden ungefähr gleich sein. Der Wert des Integrals

$$\int_a^x y\,dx$$

ist gleich der Differenz zwischen der zu x gehörigen Ordinate der Integralkurve und der zu x gehörigen Ordinate einer parallel zu PO

durch den Punkt der Integralkurve mit der Abszisse a gelegten Geraden. O bedeutet dafür den Anfangspunkt des Koordinatensystems und P braucht nicht auf der x-Achse zu liegen.

Wenn die Ordinate von P genau gleich der mittleren Ordinate der zu integrierenden Kurve für das Intervall $x = a$ bis b ist, werden die Ordinaten der Integralkurve an beiden Enden genau gleich sein. Aber die mittlere Ordinate ist nicht bekannt, bevor nicht die Kurve integriert ist.

Nachdem sie integriert ist, findet man die mittlere Ordinate für den Zwischenraum $x = a$ bis b, indem man durch P eine Parallele zu der Sehne AB der Integralkurve legt, wo die Punkte A und B zu den Abszissen $x = a$ und $x = b$ gehören. Diese Gerade schneidet die Ordinatenachse in einem Punkte, dessen Ordinate die mittlere Ordinate ist.

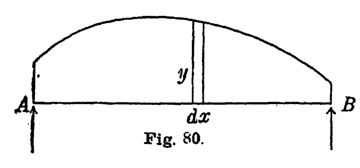


Fig. 80.

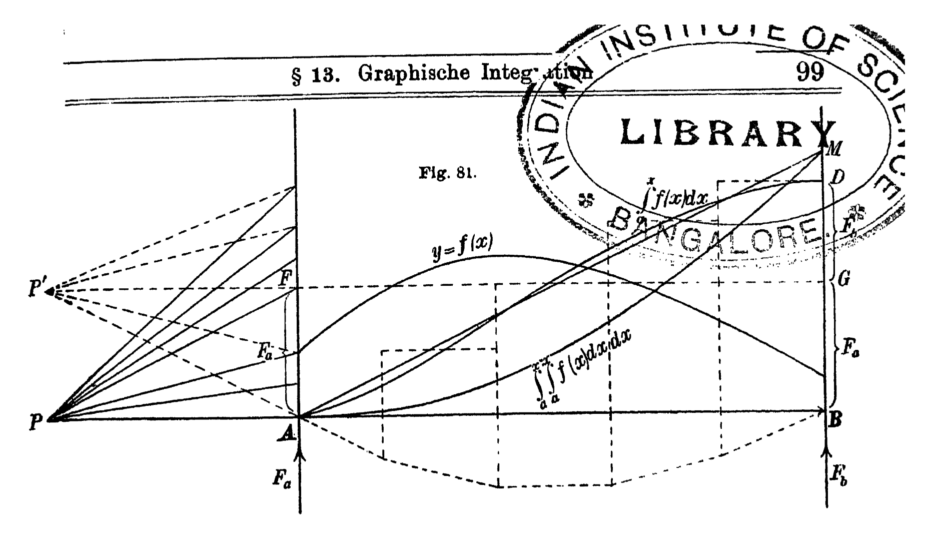
Denken wir uns einen Balken, der an beiden Enden unterstützt und mit einer Last belastet ist, die so verteilt sei, wie Fig. 80 es zeigt, d. h. die auf dx ruhende Last sei gemessen durch die Fläche $y dx$. Integrieren wir diese Kurve graphisch, indem wir im Punkte A anfangen und P auf der Linie AB annehmen. Die letzte Ordinate im Punkte B der Integralkurve

$$\int_a^x y\,dx$$

gibt die ganze Last und ist daher gleich der Summe der beiden Auflagerdrucke in A und B, die der Last das Gleichgewicht halten. Durch die zweite Integration dieser Kurve erhält man die Kurve, deren Ordinate gleich

$$\int_a^x Y\,dx, \quad \text{ist, wo } Y \text{ für } \quad \int_a^x y\,dx$$

geschrieben ist. Die Ordinate dieser Kurve an einem beliebigen Punkte $x = \xi$ stellt das statische Moment der Last zwischen den Senkrechten $x = a$ und $x = \xi$ in Bezug auf die Achse $x = \xi$ dar. Ihre letzte Ordinate BM (Fig. 81) ist das Drehungsmoment der ganzen Last um den Punkt B und, da die Auflagerdrucke die Last im Gleichgewicht halten, muß es dem Drehungsmoment der Auflagerdrucke um denselben Punkt und daher dem Drehungsmoment des Auflager-



druckes in A um B entgegengesetzt sein. Wir haben also, wenn der Auflagerdruck in A mit F_a bezeichnet wird,

$$F_a(b-a)=\int\limits_a^b Y\,d\,x,$$

d. h. F_a ist gleich der mittleren Ordinate der Kurve

$$Y=\int\limits_a^x y\,d\,x$$

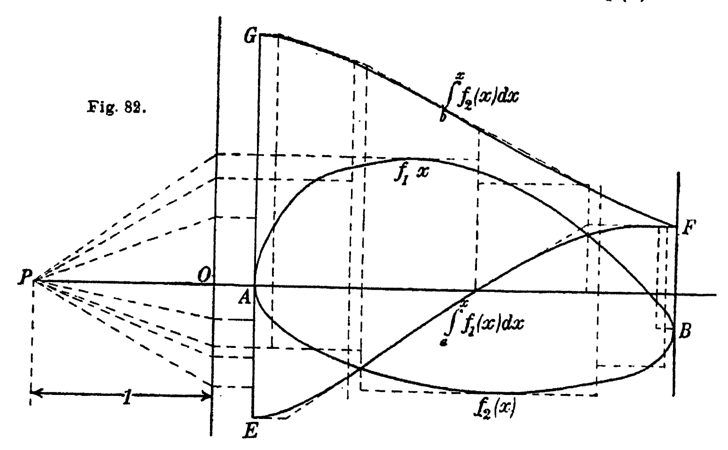
in dem Intervall $x=a$ bis b. Die mittlere Ordinate findet man, indem man eine Parallele zu AM durch P zieht, welche die Senkrechte durch A im Punkte F schneidet, so daß $AF=F_a$. Da DB der Summe beider Auflagerdrucke gleich ist, wird eine Horizontale durch F die Strecke DB in $BG=F_a$ und $GD=F_b$ teilen.

Verschiebt man P auf die Horizontale FG nach P' und wiederholt die Integration

$$\int\limits_a^x Y\,d\,x,$$

so erhält man eine Kurve mit gleichen Ordinaten an beiden Enden. Fängt man in A an, so muß sie in B enden. Ihre Ordinaten sind gleich der Differenz der Ordinaten der Sehne AM und der Kurve AM (Fig. 81) und stellen das Drehungsmoment aller auf einer Seite eines beliebigen Punktes des Balkens angreifenden Kräfte um diesen Punkt dar (Last und Gegendruck des Auflagers).

Der Flächeninhalt einer geschlossenen Kurve läßt sich durch Integration über die ganze Grenzlinie ermitteln. Setzen wir $x = a$ und $x = b$ als die beiden äußersten Abszissen einer geschlossenen Kurve, so daß die Senkrechte $x = a$ die Kurve im Punkte A, und die Senkrechte $x = b$ sie im Punkte B berührt (Fig. 82). Durch A und B ist die geschlossene Kurve in zwei Teile zerlegt, deren jeder A und B verbindet. Bezeichnen wir den oberen Teil mit $y = f_1(x)$ und den



unteren mit $y = f_2(x)$, dann ist der Flächeninhalt im ganzen gleich der Differenz

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{oder gleich} \quad \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^a f_2(x)\,dx.$$

Wir lassen die Integralkurve über den oberen Teil an einem beliebigen Punkt E auf der Senkrechten $x = a$ anfangen und zeichnen die gebrochene Linie bis F auf der Senkrechten $x = b$ (Fig. 82). Dann integrieren wir wieder zurück, über den unteren Teil und setzen die gebrochene Linie von F nach G fort. Die Linie EG, in der für die Ordinaten gewählten Längeneinheit gemessen, ist dann gleich dem Flächeninhalt. Die Flächeneinheit ist dabei gleich dem Rechteck, das von PO und der Längeneinheit der Ordinaten gebildet wird. Der Flächeninhalt ist also gleich dem des von PO und EG gebildeten Rechtecks.

Die Methode ist nicht auf den in Fig. 82 gezeichneten Fall beschränkt. Fig. 83 zeigt einen komplizierteren Fall. Aber in allen

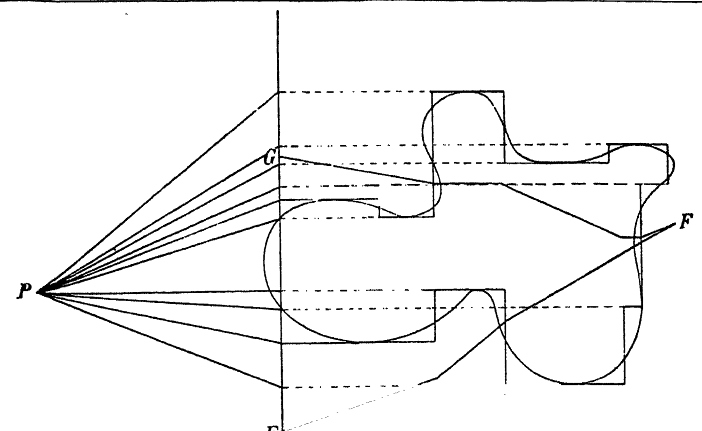


Fig. 83.

Fällen, wo es nicht darauf ankommt, die Integralkurve, sondern nur darauf, die Differenz zwischen der ersten und der letzten Ordinate zu finden, ist die Methode von geringem Wert, weil sie mit dem Planimeter nicht konkurrieren kann.

Beim Konstruieren der gebrochenen Linie sind bisher die Stufen so gezeichnet worden, daß die Flächen auf beiden Seiten des senkrechten Stufenabsatzes einander gleich waren. Es wäre gerade so zulässig, die Stufenlinien so anzuordnen, daß die Flächen auf beiden Seiten ihrer horizontalen Abschnitte einander gleich wären (Fig. 84).

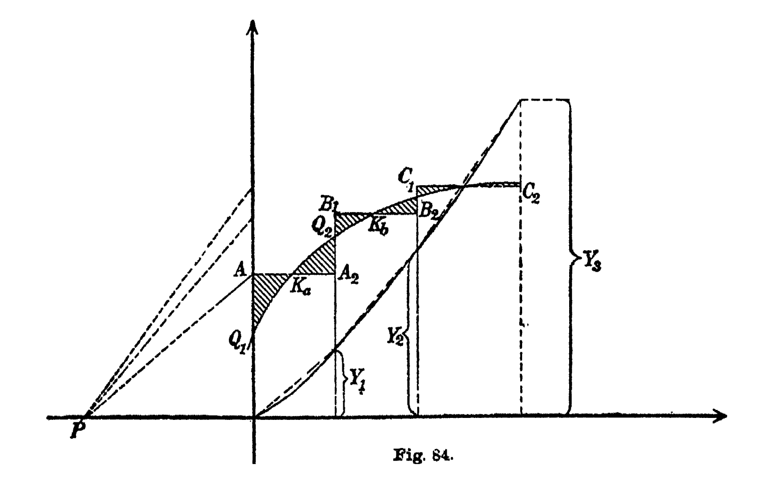


Fig. 84.

Die gebrochene Linie würde sich dann aus einer Reihe von Sehnen statt aus Tangenten der Integralkurve zusammensetzen. Die Punkte K_a, K_b, ..., wo die horizontalen Stufenabsätze die Kurve schneiden, würden die Abszissen derjenigen Punkte der Integralkurve angeben, wo ihre Richtung der Richtung der gebrochenen Linie parallel ist. Aber dies hilft zum Zeichnen der Integralkurve nur wenig, und das ist der Grund, warum die erste Methode, wo die gebrochene Linie aus Tangenten besteht, vorzuziehen ist. Wo es sich indessen nur darum handelt, die letzte Ordinate der Integralkurve zu finden, sind beide Methoden von gleichem Werte.

§ 14. Graphische Differentiation.

Die graphische Differentiation einer Funktion, die durch eine Kurve dargestellt wird, ist weniger befriedigend wie die graphische Integration, weil die Werte des Differentialkoeffizienten meistens durch die Kurve nicht sehr genau bestimmt sind. Das Verfahren besteht darin, an die gegebene Kurve Tangenten zu legen, und durch P Parallelen zu diesen zu ziehen (Fig. 85). Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Ordinatenachse liefern die Ordinaten der abgeleiteten Kurve. Die Abszisse zu jeder Ordinate stimmt mit der Abszisse des Berührungspunktes der entsprechenden Tangente überein. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die Tangenten genau zu zeichnen.

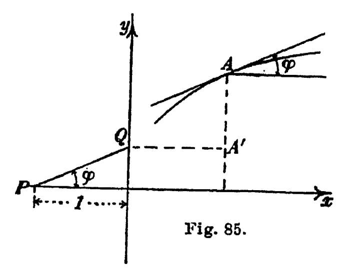


Fig. 85.

In der Regel empfiehlt es sich, eine Tangente von gegebener Richtung zu ziehen, und dann ihren Berührungspunkt zu bestimmen, anstatt zu versuchen, für einen gegebenen Berührungspunkt die Tangente zu ziehen. Eine Methode, den Berührungspunkt genauer als durch bloße Anschauung zu bestimmen, besteht darin, zur Tangente parallel eine Anzahl von Sehnen zu ziehen und sie zu halbieren. Die Halbierungspunkte bilden eine Kurve, die die gegebene Kurve im Berührungspunkte der Tangente schneidet (Fig. 86). Wenn eine Anzahl Tangenten gezogen, ihre Berührungspunkte bestimmt, und die die Differentialkoeffizienten darstellenden Punkte konstruiert sind, muß die differenzierende Kurve durch diese Punkte gezogen werden. Dies gelingt am sichersten mit Hilfe der Stufenlinie. Die horizontalen Stufenteile gehen durch die Punkte, während die senkrechten Abschnitte jedesmal mit dem Schnittpunkt zweier aufeinander folgender Tangenten auf

derselben Senkrechten liegen. Die differenzierende Kurve verbindet die Punkte derart, daß die Flächen zwischen ihr und der Stufenlinie auf beiden Seiten jedes senkrechten Stufenabsatzes gleich sind. So

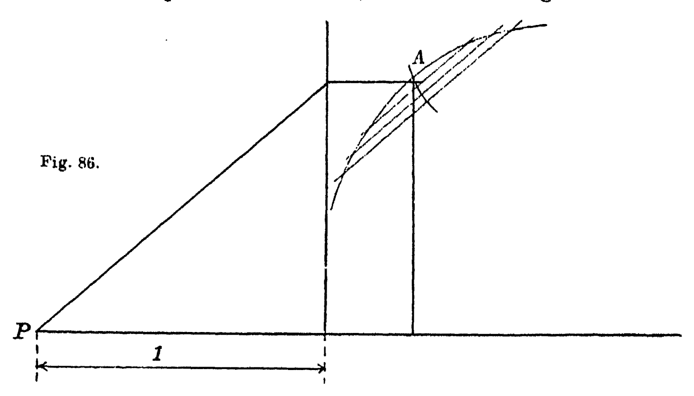


Fig. 86.

ergibt sich bei der graphischen Differentiation genau dieselbe Figur wie bei der Integration, nur werden die Operationen in umgekehrter Reihenfolge vorgenommen.

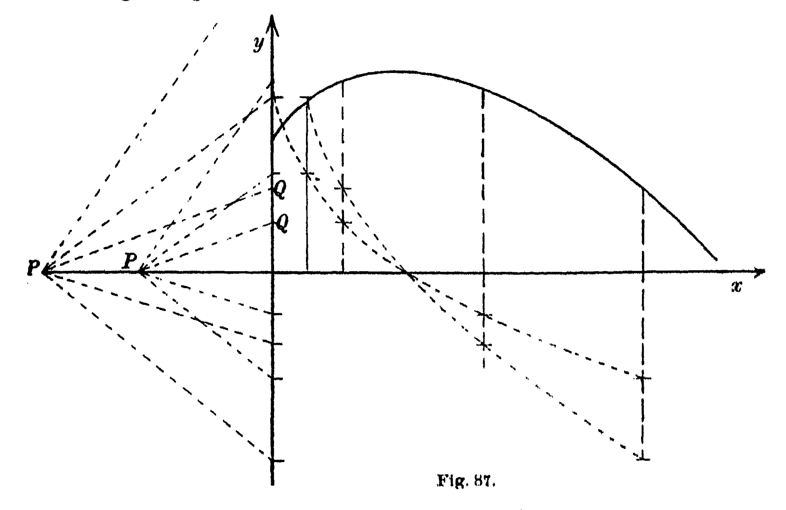


Fig. 87.

Eine Veränderung der Entfernung PO (Fig. 87) verändert die Ordinaten der differenzierenden Kurve im selben Verhältnis und aus demselben Grunde wie sie bei der Integration die Ordinaten der

Integralkurve verändert, aber im umgekehrten Sinne. Jede Änderung der Ordinate von P verschiebt nur die Kurve um den gleichen Betrag nach oben oder unten, sodaß, wenn gleichzeitig die x-Achse verändert und durch das neue P gelegt wird, die Ordinaten der Kurve sich gleich bleiben und den Differentialkoeffizienten darstellen werden.

Ist eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen durch ein Diagramm gegeben, welches die Kurve $f(x, y) = \text{const.}$ für äquidistante Werte von $f(x, y)$ zeigt, so können die partiellen Differentialkoeffizienten an einem beliebigen Punkte x_0, y_0 gefunden werden, indem man Kurven zeichnet, deren Ordinaten $f(x, y_0)$ zur Abszisse x oder $f(x_0, y)$ zur Abszisse y darstellen und die oben angegebene Methode anwendet. Zu diesem Zwecke zieht man eine Parallele zur x-Achse z. B. durch den Punkt x_0, y_0 und errichtet an den Punkten, wo sie die Kurven $f(x, y) = \text{const.}$ schneidet, Ordinaten, die die Werte von $f(x, y_0)$ in irgend einem passenden Maßstabe darstellen. Durch die so gefundenen Punkte zieht man dann eine glatte Kurve und die Tangente derselben im Punkte x_0 liefert den Differentialkoeffizienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ für $x = x_0$, $y = y_0$.

Die Differentialkoeffizienten $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ lassen sich graphisch am besten durch eine Gerade darstellen, die vom Punkte x, y, dem die Differentialkoeffizienten entsprechen, ausgeht und deren Länge und Richtung derart sind, daß ihre orthogonalen Projektionen auf die x- und y-Achsen gleich $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind. Diese Linie stellt den Gradienten der Funktion $f(x, y)$ im Punkte x, y dar.[1]) Sie ist rechtwinklig zur Kurve $f(x, y) = \text{const.}$, die durch den Punkt x, y hindurchgeht. Ihre Richtung ist die der steilsten Steigung. Ihre Länge mißt die Neigung der Fläche $z = f(x, y)$ in der Richtung der steilsten Steigung. Dies läßt sich durch Betrachtung der Neigung in einer beliebigen anderen Richtung zeigen. Verändern wir x und y um

$$r \cos \alpha, \quad r \sin \alpha$$

und betrachten wir die entsprechende Veränderung

$$\triangle z = f(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) - f(x, y)$$

der Funktion. Nach dem Taylorschen Lehrsatze kann man dafür schreiben

1) Siehe Kap. II, § 10.

$$\frac{\partial f}{\partial x} r \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \alpha + \text{Glieder höherer Ordnung in } r.$$

α ist die Richtung vom Punkte x, y nach dem neuen Punkte $x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha$, und r ist die Entfernung der beiden Punkte. Teilt man Δz durch r und läßt r sich der Null nähern, so findet man

$$\lim \frac{\Delta z}{r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha.$$

Dieser Ausdruck mißt die Neigung der Fläche $z = f(x, y)$ in der Richtung α. Führt man nun die Länge l und den Winkel λ des Gradienten ein und schreibt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = l \cos \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = l \sin \lambda,$$

dann hat man $\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha = l \cos (\alpha - \lambda)$.

Das will sagen: die Neigung in einer beliebigen Richtung α ist proportional $\cos (\alpha - \lambda)$; sie hat ihr Maximum in der Richtung des Gradienten $(\alpha = \lambda)$, wird Null in einer dazu rechtwinkligen Richtung, und negativ in allen Richtungen, die einen stumpfen Winkel dazu bilden. Werden alle drei Koordinaten in gleichen Einheiten gemessen, so ist die Länge von l, in dieser Einheit gemessen, gleich der Tangente des Winkels der steilsten Neigung. Wenn die Längeneinheit, in welcher die Werte von $f(x, y)$ aufgetragen sind, unverändert bleibt, während die den Werten x und y entsprechende Längeneinheit geändert wird, so verändert sich die Länge des Gradienten wie das Quadrat der Längeneinheit.

§ 15. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Stellt man sich die Aufgabe eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

auf graphischem Wege zu lösen, so ist die erste Frage die, wie die Differentialgleichung graphisch gegeben sein soll. Wenn x und y die Werte rechtwinkliger Koordinaten bezeichnen, so ist die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung, daß an jedem Punkte x, y, wo $f(x, y)$ definiert ist, die Gleichung eine bestimmte Kurvenrichtung vorschreibt. Man denke sich durch alle Punkte, für welche $f(x, y)$ gewisse konstante Werte hat, Kurven gezogen, dann entspricht jede Kurve einer gewissen Richtung oder der entgegengesetzten. Bezeich-

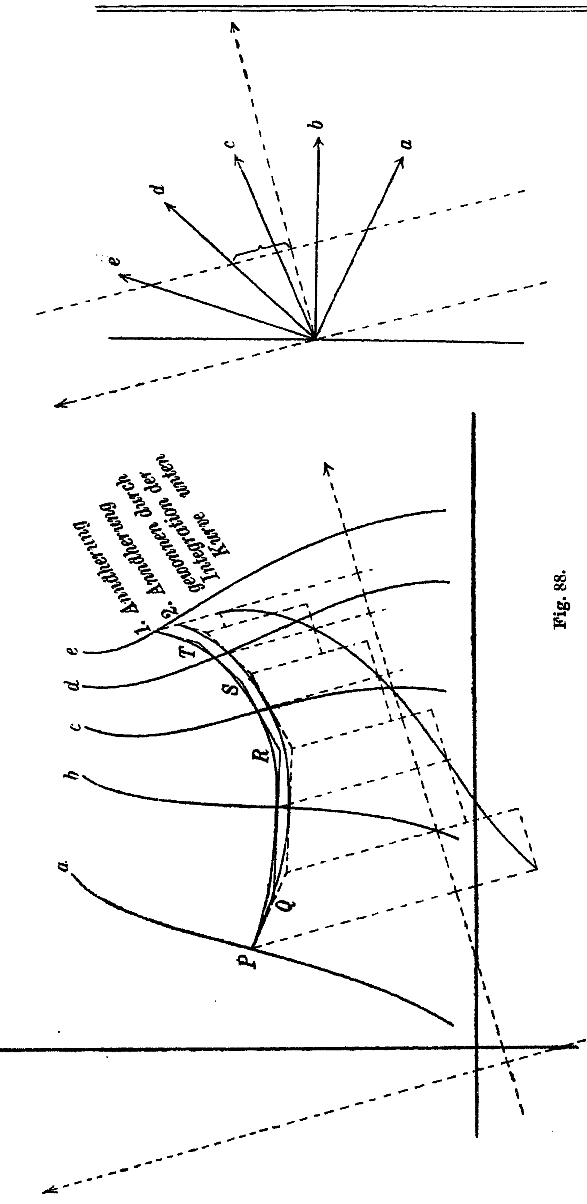


Fig. 88.

nen wir nun die Kurven durch Zahlen oder Buchstaben, und zeichnen ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen mit denselben Zahlen oder Buchstaben versehen werden, in der Weise, daß jede von ihnen die Richtung auf der mit der gleichen Zahl oder dem gleichen Buchstaben bezeichneten Kurve anzeigt (Fig. 88). Die Zeichnung beschränkt sich natürlich auf einen gewissen Bereich, innerhalb dessen wir die der Differentialgleichung genügenden Kurven aufzufinden beabsichtigen. Es kann sein, daß $f(x,y)$ über die Zeichnung hinaus auch noch definiert ist; diese Bereiche müssen dann für sich behandelt werden.

Die graphische Darstellung der Differentialgleichung im betrachteten Bereich besteht in der Beziehung zwischen den Kurven und den Strahlen. Man beachte besonders, daß diese Darstellung von dem Koordinatensystem unabhängig ist, mit dessen Hilfe die Kurven aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

abgeleitet worden sind. Man kann nun ein be-

liebiges Koordinatensystem ξ, η einführen, und durch die Zeichnung die Gleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta)$$

definieren, d. h. man kann den Wert von $\varphi(\xi, \eta)$ an irgend einem Punkte ξ, η unserer Zeichnung ermitteln. Wenn z. B. die Längeneinheit für ξ und η die gleiche ist, zieht man durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels in der Richtung der positiven ξ-Achse eine Gerade und in der Entfernung 1 vom Mittelpunkte eine dazu rechtwinklige Gerade. Der Abschnitt auf der zweiten Geraden zwischen der ersten Geraden und dem Schnittpunkt mit einem der Strahlen liefert, in Längeneinheiten gemessen, und in der Richtung des positiven η positiv gezählt, den Wert von $\varphi(\xi, \eta)$ für alle dem betreffenden Strahl entsprechenden Punkte ξ, η. In dieser Beziehung ist die graphische Darstellung einer Differentialgleichung der analytischen Form überlegen, in welcher bestimmte Koordinaten benutzt werden und der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem einige Rechenarbeit verursacht.

Suchen wir nun einmal die durch einen gegebenen Punkt P auf der mit (a) bezeichneten Kurve (Fig. 88) hindurchgehende Kurve zu finden, die der Differentialgleichung genügt. Man beginnt damit eine Reihe von Tangenten einer Kurve zu zeichnen, die als erste Annäherung dienen soll. Durch P zieht man eine Parallele zu dem Strahl (a) bis nach dem Punkte Q etwa in der Mitte zwischen den Kurven (a) und (b). Durch Q wird eine Parallele zum Strahl (b) nach dem etwa in der Mitte zwischen den Kurven (b) und (c) gelegenen Punkte R gezogen. Durch R legt man wieder eine Parallele zu dem Strahl (c) und so fort. Die diese gebrochene Linie an den Schnittpunkten mit den Kurven (a), (b) . . . berührende Kurve ist eine erste Annäherung, aber man braucht diese Kurve nicht zu zeichnen. Um eine bessere Annäherung zu finden, führt man ein System rechtwinkliger Koordinaten x, y ein, dessen x-Achse etwa in der mittleren Richtung der gebrochenen Linie liegt. Nennen wir y_1 die Funktion von x, die der ersten Annäherung entspricht. Dann erhält man die zweite Annäherung y_2 als eine Integralkurve von $f(x, y_1)$

$$y_2 = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y_1)\,dx,$$

wo x_p, y_p die Koordinaten von P bezeichnen. Zu diesem Zwecke muß zuerst die Kurve konstruiert werden, deren Ordinaten gleich $f(x, y_1)$ sind. Die Werte von $f(x, y_1)$ findet man in den Punkten, wo die

erste Annäherung die Kurven (a), (b) ... schneidet, in der schon oben beschriebenen Weise. Durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels wird eine Parallele zur x-Achse gezogen und in einer als Längeneinheit gewählten passenden Entfernung vom Mittelpunkt eine dazu rechtwinklige Gerade. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Strahlen geben Abschnitte, deren Längen gleich den Werten $f(x, y_1)$ auf den entsprechenden Kurven sind. Diese Werte trägt man als Ordinaten zu den Abszissen der Schnittpunkte der ersten Annäherung mit den Kurven (a), (b), ... auf und zeichnet nun eine Kurve

$$Y = f(x, y_1)$$

(Fig. 88). Diese Kurve integriert man graphisch, mit dem Punkte P beginnend, dann ist die Integralkurve eine zweite Annäherung. Auch diese Kurve braucht man nicht zu zeichnen; wenn eine dritte Annäherung konstruiert werden soll, genügt die gebrochene Linie. In diesem Falle muß das obige Verfahren wiederholt werden, was dieses Mal viel schneller geht als vorher, weil die Werte $f(x, y)$ auf den Kurven (a), (b) ... bereits konstruiert sind und zur Verfügung stehen Um die Kurve

$$Y = f(x, y_2)$$

zu finden, braucht man nur dieselben Ordinaten neuen Abszissen zuzuordneu, den Abszissen der Schnittpunkte der zweiten Annäherung mit den Kurven (a), (b) ... Dann wird die Kurve

$$Y = f(x, y_2)$$

gezogen und vom Punkte P anfangend graphisch integriert.

Angenommen nun, die Integralkurve unterschiede sich nicht von der zweiten Annäherung, so würde das bedeuten, daß

$$y_2 = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y_2)\,dx \qquad \text{oder daß} \quad \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_2),$$

d. h. daß y_2 der Differentialgleichung genügt.

Wenn eine wahrnehmbare Abweichung besteht, stellt die Integralkurve eine dritte Annäherung dar. Picard hat gezeigt, daß man auf diesem Wege fortschreitend (unter einem unten zu entwickelnden Vorbehalt) die gegen die wahre Lösung der Differentialgleichung konvergierenden Annäherungen findet, so daß nach einer Anzahl von Wiederholungen des Verfahrens der Fehler der Annäherung unmerklich werden muß.

Bezeichnet man mit y_n die Funktion der n-ten Annäherung, so hat man

$$y_{n+1} = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y_n)\, dx.$$

Unter denselben Anfangsbedingungen $y = y_p$ für $x = x_p$ genügt die wahre Lösung der Gleichung:

$$y = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y)\, dx.$$

Daraus ergibt sich, daß

$$y_{n+1} - y = \int_{x_p}^{x} [f(x, y_n) - f(x, y)]\, dx$$

oder
$$y_{n+1} - y = \int_{x_p}^{x} \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y} (y_n - y)\, dx.$$

Nehmen wir nun an, daß der absolute Betrag von

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$$

für alle Werte von x, y, y_n innerhalb des betrachteten Bereichs eine gewisse Grenze M nicht überschreitet, dann folgt daraus, daß die folgende Beziehung zwischen dem Maximalfehler von y_n, der mit e_n, und dem Maximalfehler von y_{n+1}, der mit e_{n+1} bezeichnet sei, bestehen muß. Da der absolute Wert des Integrals nicht größer ist als

$$M e_n \mid x - x_p \mid$$

(wo $| x - x_p |$ den absoluten Wert von $x - x_p$ bezeichnet), so haben wir

$$e_{n+1} \leqq M \mid x - x_p \mid e_n.$$

Folglich kann, so lange die Strecke $x - x_p$, über welche integriert wird, so klein ist, daß

$$M \mid x - x_p \mid \leqq k < 1,$$

der Maximalfehler von y_{n+1} nicht größer sein, als ein gewisser Bruchteil des Maximalfehlers von y_n. Ebenso aber folgt es, daß der Fehler von y_n nicht größer sein kann als derselbe Bruchteil des Maximalfehlers von y_{n-1} und so fort, so daß

$$e_{n+1} \leqq k e_n \leqq k^2 e_{n-1} \ldots \leqq k^n e_1$$

Da aber e_1 eine Konstante ist und k eine Konstante, die kleiner ist

als 1, so muß $k^n e_1$ für einen hinreichend hohen Wert von n so klein werden, wie man will, d. h. die Annäherungen konvergieren gegen die wahre Lösung.

Da M eine gegebene Konstante ist, so wird die Bedingung der Konvergenz

$$M \mid x - x_p \mid \leqq k < 1$$

die Integration in der Richtung der x-Achse beschränken; aber das Verfahren kann trotzdem fortgesetzt werden, denn man kann jeden beliebigen Punkt P', der mit hinreichender Genauigkeit erreicht ist, zu einem neuen Ausgangspunkt machen, indem man eine der neuen Annahme angemessene neue x-Achse einführt. In der Regel wird es sich nicht lohnen, den Wert von M zu ermitteln, um dann vermittelst desselben das Maß der Konvergenz festzustellen, die Konstruktion der Annäherungen selbst zeigt gewöhnlich deutlich genug, wie weit die Integration auszudehnen ist. Sobald zwei aufeinander folgende Annäherungen keine Abweichungen voneinander zeigen, stellen sie die gesuchte Kurve, d. h. die wahre Lösung dar.

Angenommen, daß

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$$

für alle in Betracht kommenden Werte von x, y, y_n ein negatives Vorzeichen hat, angenommen ferner, daß $y_n - y$ für die ganze Ausdehnung der Integration

$$y_{n+1} - y = \int_{x_p}^{x} \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y} (y_n - y)\, dx$$

das gleiche Vorzeichen hat, d. h., daß die Annäherungskurve y_n ganz auf einer Seite der wahren Kurve liegt, dann muß offenbar, wenn $x - x_p$ positiv ist, $y_{n+1} - y$ das umgekehrte Zeichen haben wie $y_n - y$, oder die Annäherungskurve y_{n+1} liegt ganz auf der anderen Seite der wahren Kurve, wie y_n. Für diese und alle folgenden Annäherungen muß die gesuchte Kurve zwischen zwei aufeinander folgenden Annäherungen liegen. Wenn die erste Annäherung y_1 ganz auf einer Seite der gesuchten Kurve liegt, gilt der Satz für je zwei beliebige aufeinander folgende Annäherungen. Dies ist für die Schätzung des Fehlers sehr bequem.

In Fig. 88 ist

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$$

vom Punkte P bis in die Nähe von S negativ. Die erste Annäherung liegt ganz oberhalb der gesuchten Kurve. Daher muß die zweite Annäherung in dem Stücke von P bis etwa S darunter liegen.

Wenn das Vorzeichen von $\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$ positiv ist, gilt derselbe Satz für negative Werte von $x - x_p$. Wenn man in der positiven x-Richtung integriert hat, kann es sich empfehlen, das Ergebnis durch Integration nach rückwärts nachzuprüfen, wobei man von einem erreichten Punkte ausgeht und sich vergewissert, ob die Kurve zum ersten Ausgangspunkt zurückkehrt. In dieser Richtung hat man den Vorteil, daß die gesuchte Kurve zwischen aufeinander folgenden Annäherungen liegt, und kann die Genauigkeit der Zeichnung besser beurteilen.

Wir haben gesehen, daß die Konvergenz von dem Maximum des absoluten Wertes von

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$$

für alle in Betracht kommenden Werte von x, y, y_n, abhängig ist. Um diesen Maximalwert zu finden, können wir ebenso gut

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

für alle Werte von x, y im betrachteten Bereich untersuchen, denn, wenn man $\frac{\partial f}{\partial y}$ als stetige Funktion von y voraussetzt, so folgt, daß der Differenzenquotient $\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}$ gleich $\frac{\partial f}{\partial y}$ für denselben x-Wert und einen zwischen y und y_n liegenden y-Wert sein muß. Dies ist sofort ersichtlich, wenn man $f(x, y)$ als Ordinate zur Abszisse y für einen bestimmten x-Wert aufträgt. Der Wert des Differenzenquotienten wird bestimmt durch die Neigung der Sehne zwischen den beiden Punkten mit den Abszissen y und y_n. Die Neigung der Sehne ist gleich der Neigung der Kurve an einem bestimmten zwischen den Enden der Sehne liegenden Punkte Der Wert von $\frac{\partial f}{\partial y}$ an diesem Punkte ist gleich dem Werte von

$$\frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}.$$

Ermitteln wir nun, wie das Koordinatensystem am besten zu wählen ist, um $\frac{\partial f}{\partial y}$ so klein wie möglich zu machen und so die beste Konvergenz zu erzielen. Zu diesem Zwecke wollen wir untersuchen, wie sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems der Wert von $\frac{\partial f}{\partial y}$ an einem bestimmten Punkte ändert.

Gehen wir von einem gegebenen System rechtwinkliger Koordinaten ξ, η aus und schreiben mit diesem die Differentialgleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta).$$

Die Richtung der die Differentialgleichung befriedigenden Kurve bildet mit der positiven ξ-Achse einen Winkel α, den die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta)$$

bestimmt (vorausgesetzt, daß die Koordinaten in der gleichen Einheit gemessen werden). Führen wir nun ein neues System rechtwinkliger Koordinaten x, y ein, das mit dem ξ, η-System in Beziehung gesetzt wird durch die Gleichungen

$$x = \xi \cos\omega + \eta \sin\omega \qquad y = -\xi \sin\omega + \eta \cos\omega,$$

welche gleichbedeutend sind mit

$$\xi = x \cos\omega - y \sin\omega \qquad \eta = x \sin\omega + y \cos\omega,$$

wo ω den von der positiven x-Richtung mit der positiven ξ-Richtung gebildeten Winkel in der üblichen Weise von ξ nach x gezählt, bezeichnet.

Der von der Richtung der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse gebildete Winkel ist $\alpha - \omega$ und daher

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega) = f(x, y).$$

Folglich erhalten wir für einen gegebenen Wert von ω

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(\alpha - \omega)} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

oder, da α als eine Funktion von ξ und η gegeben ist,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(\alpha - \omega)} \cdot \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \sin\omega + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cos\omega\right).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die ξ-Achse die Tangente der durch den gegebenen Punkt hindurchgehenden Kurve $\varphi(\xi, \eta) = \text{const.}$ sei, so daß $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = 0$.

Dann haben wir
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(\alpha - \omega)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cos\omega,$$

und es gilt nun, zu ermitteln, wie $\frac{\partial f}{\partial y}$ sich für verschiedene Werte

von ω ändert. $\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}$ ist der Gradient von α; er ist von ω unabhängig und kann durch eine vom Nullpunkt A (Fig. 89) ausgehende zu der Kurve $\alpha = \text{const.}$ oder $\varphi(\xi, \eta) = \text{const.}$ rechtwinklige Gerade dargestellt werden.

Daß der Wert von $\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}$ positiv angenommen ist, bedingt keine

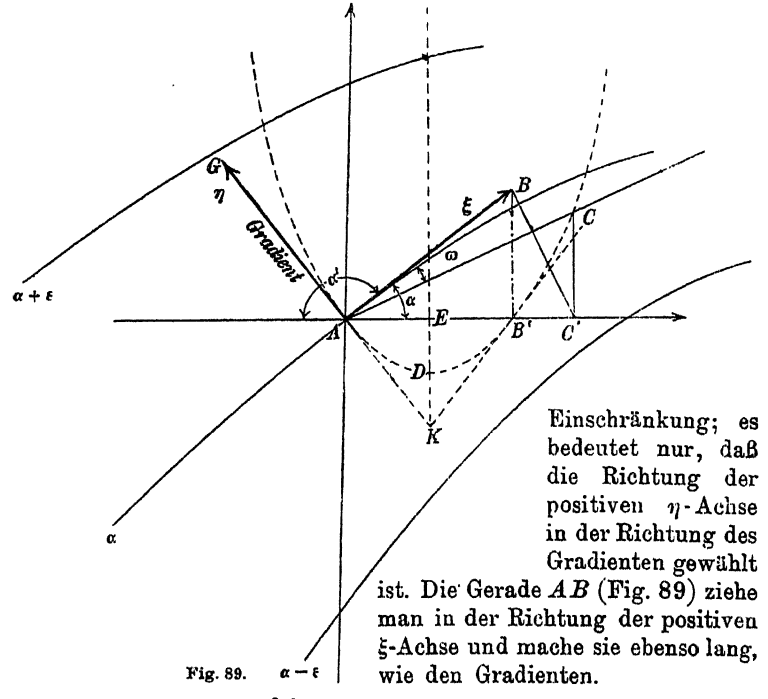


Fig. 89.

Einschränkung; es bedeutet nur, daß die Richtung der positiven η-Achse in der Richtung des Gradienten gewählt ist. Die Gerade AB (Fig. 89) ziehe man in der Richtung der positiven ξ-Achse und mache sie ebenso lang, wie den Gradienten.

Um die Werte von $\frac{\partial f}{\partial y}$ für die verschiedenen Lagen der x-Achse zur Anschauung zu bringen, trage man die Werte von $\frac{\partial f}{\partial y}$ als Abszissen auf der x-Achse auf; z. B. nimmt für $\omega = \alpha$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ den Wert $\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cos \alpha$ an. Die diesem Werte entsprechende Abszissse ist AB' (Fig. 89), die Orthogonalprojektion von AB auf die in der Richtung $\omega = \alpha$ gewählte x-Achse. Für eine beliebige andere, irgend einem anderen Werte von ω entsprechende, Lage AC (Fig. 89) findet man

$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cos \omega$ durch Orthogonalprojektion von AB auf die Richtung von AC. Die Division durch $\cos(\alpha - \omega)$ liefert dann AC' und eine nochmalige Division durch $\cos(\alpha - \omega)$ führt dann auf AC, wo $C'C$ senkrecht zu AC' gezogen ist. So läßt sich eine Kurve konstruieren, deren Polarkoordinaten $r = \frac{\partial f}{\partial y}$ und ω sind, deren Gleichung in Polarkoordinaten also lautet:

$$r = \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \cdot \frac{\cos \omega}{\cos^2(\alpha - \omega)} \quad \text{oder} \quad [r \cos(\alpha - \omega)]^2 = \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} r \cos \omega .$$

In rechtwinkligen Koordinaten ξ, η ausgedrückt, nimmt die Gleichung die Form

$$(\cos \alpha \xi + \sin \alpha \eta)^2 = \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \xi$$

an. Dies zeigt, daß die Kurve eine Parabel ist, deren Achse zu der Richtung α rechtwinklig ist. AB' ist eine Sehne und der Gradient AG ist eine Tangente der Parabel. Halbiert man AB' und zieht durch den Halbierungspunkt E rechtwinklig zu AB' bis zur η-Achse die Gerade EK, so findet man im Halbierungspunkt dieser Geraden den Scheitelpunkt D der Parabel. Die drei Punkte A, B', D zusammen mit dem Gradienten genügen, um uns über die Größe und das Vorzeichen von $\frac{\partial f}{\partial y}$ für die verschiedenen Lagen der positiven x-Achse zu orientieren.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet, wenn die x-Achse zu der Kurve $\alpha = \text{const.}$ rechtwinklig steht, so daß dies die günstigste Lage zu sein scheint. Man muß aber im Auge behalten, daß die x-Achse für eine gewisse Ausdehnung der Integration dieselbe bleibt. Wenn wir zu anderen Punkten übergehen, ist die Kurve $\alpha = \text{const.}$ dort nicht mehr rechtwinklig zur x-Achse. Die Lage der x-Achse ist günstig, wenn der Durchschnittswert von $\frac{\partial f}{\partial y}$ klein ist. In Fig. 90 sind die Parabeln für eine Anzahl Punkte an einer der Differentialgleichung in erster Annäherung genügenden Kurve konstruiert.

Wenn die Parabeln dazu dienen sollen, die numerischen Werte von $\frac{\partial f}{\partial y}$ zu geben, muß auch die Längeneinheit, in der die Koordinaten gemessen sind, angemerkt werden. Der numerische Wert von $\frac{\partial f}{\partial y}$ ändert sich wie die Längeneinheit, und daher muß die Länge der ihn darstellenden Strecken sich wie das Quadrat der Längeneinheit

ändern. Wenn man aber eine Linie zieht, deren Länge, in derselben Einheit gemessen, gleich $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ ist, so würde diese von der Längeneinheit unabhängig sein. Denn, wenn l die die Längeneinheit darstellende

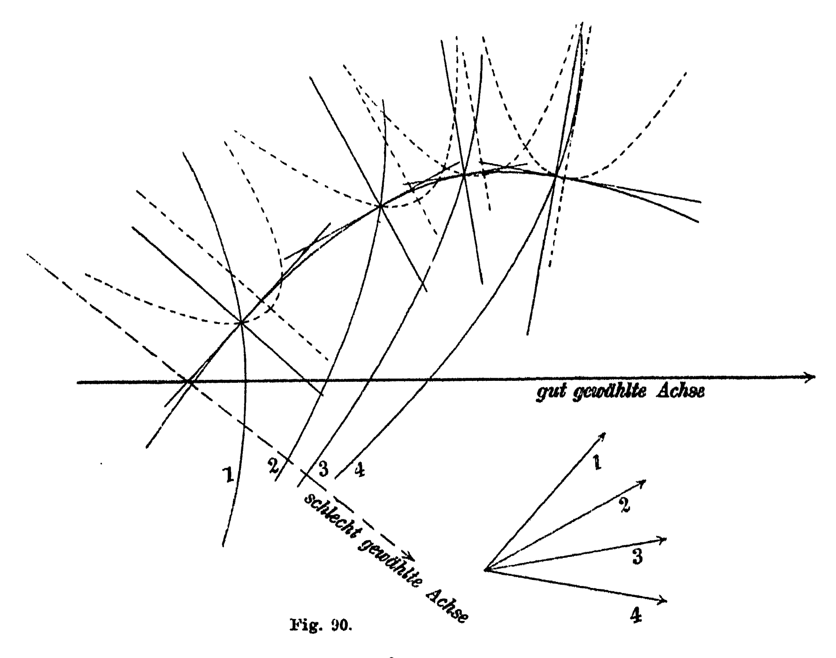


Fig. 90.

Strecke und l', l'' die die Werte $\frac{\partial l}{\partial y}$ und $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ darstellenden Strecken sind, so würde $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleich dem Verhältnis $\frac{l'}{l}$ und $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ gleich dem Verhältnis $\frac{l''}{l}$ sein; daher $l'' = \frac{l^2}{l'}$. Da l' bei einer Veränderung der Längeneinheit sich wie l^2 verändert, ist l'' von der Längeneinheit unabhängig. Diese Linie l'' stellt die Grenze dar, jenseits welcher das Produkt $\frac{\partial f}{\partial y} \cdot l''$ größer wird als 1. Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall denselben Wert hätte, würde dies die Grenze bedeuten, welche der oben besprochenen Konvergenzbedingung entspricht. Man könnte die Länge

von $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ in den verschiedenen Richtungen abtragen, ebenso wie $\frac{\partial f}{\partial y}$ abgetragen wurde. Es ergibt sich dann eine Kurve, die der Parabel Punkt für Punkt entspricht, es ist eine nach reziproken Radien abgebildete Parabel. Aber alle diese Vorbereitungen lohnen in der Regel der Mühe nicht. Man nimmt besser, ohne erst mit dem Suchen nach der allergünstigsten Lage Zeit zu verlieren, die Integration geradewegs in Angriff mit einer x-Achse, die auf den Kurven $\alpha = \text{const.}$ etwa rechtwinklig steht, so lange die Richtung der Kurve mit der Kurve $\alpha = \text{const.}$ einen einigermaßen beträchtlichen Winkel bildet. Bei der Durchführung des Verfahrens wird die Konvergenz sich schon zeigen. Wenn der Winkel, den die Richtung der die Differentialgleichung befriedigenden Kurve und die Kurve $\alpha = \text{const.}$ miteinander bilden, klein wird, rückt der Scheitelpunkt der Parabel weit hinaus und wenn die Richtung der beiden Kurven zusammenfällt, löst sich die Parabel in zwei zu der Richtung der Kurve $\alpha = \text{const.}$ rechtwinklige Parallelen auf. In diesem Falle ist die beste Lage für die x-Achse die Richtung der Kurve $\alpha = \text{const.}$ Ohne sich in eine ausführliche Erörterung der günstigsten Lage für die x-Achse einzulassen, kann man die allgemeine Regel aufstellen, daß die x-Achse nicht zu der die Differentialgleichung befriedigenden Kurve rechtwinklig, d. h. der Parabelachse nicht parallel sein darf, aber man braucht diese Regel kaum zu formulieren, denn sie wird sich in der Praxis von selbst Geltung verschaffen, weil für solche Lage der x-Achse nicht nur $\frac{\partial f}{\partial y}$, sondern auch $f(x, y)$ unendlich werden und es unmöglich sein würde, die Kurve $Y = f(x, y)$ aufzutragen.

Es gibt noch eine andere Methode, eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

zu integrieren, die in manchen Fällen der oben beschriebenen gleichwertig ist. Wie die erstere ist sie einer gewissen numerischen Methode analog.

Die numerische Methode geht von gegebenen Werten x, y aus und berechnet die einer kleinen Veränderung von x entsprechende Veränderung von y. Sei h der Betrag der Veränderung von x, und k der von y, so daß $x + h$ und $y + k$ die Koordinaten eines Punktes auf der die Differentialgleichung befriedigenden Kurve sind, die durch

den Punkt x, y hindurchgeht. k wird auf folgende Weise berechnet.[1]) Man berechnet nacheinander vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4 aus den folgen- Gleichungen

$$k_1 = f(x, y)h, \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)h,$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)h, \quad k_4 = f(x + h, y + k_3)h.$$

Dann bildet man die arithmetischen Mittel

$$p = \frac{k_2 + k_3}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{k_1 + k_4}{2},$$

und findet als sehr nahe Annäherung, wenn h nicht zu groß ist

$$k = p + \tfrac{1}{3}(q - p).$$

Die neuen Werte

$$X = x + h, \quad Y = y + k$$

werden dann für x und y eingesetzt und auf dieselbe Art die Koordinaten eines dritten Punktes berechnet, usw.

Diese Rechnung kann mit Vorteil auf graphischem Wege ausgeführt werden, wenn die Funktion $f(x, y)$ sich in einer zweckentsprechenden Weise darstellen läßt. Man denke sich eine Reihe äquidistanter Parallelen zur Ordinatenachse: $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3, \ldots$ An diesen Geraden entlang ist $f(x, y)$ eine Funktion von y. Man trägt nun die Werte von $f(x, y)$ als Ordinaten zur Abszisse y ab, wobei die y-Achse als Abszissenachse dient. So erhält man eine Anzahl Kurven, welche die Funktionen $f(x_0, y), f(x_1, y), f(x_2, y), \ldots$ darstellen. Von einem Punkte $A(x_0, y_0)$ auf der ersten Senkrechten $x = x_0$ (Fig. 91) ausgehend, gelangt man auf folgende Weise zum Punkte B_1 auf der Senkrechten $x = x_2$. Eine Horizontale durch den Punkt A führt auf den Punkt A' auf der $f(x_0, y)$ darstellenden Kurve. Seine Ordinate ist gleich $f(x_0, y_0)$. Ein aus dem Punkte A' auf die x-Achse gefälltes Lot ergibt den Punkt A'', den man mit P verbindet. P ist ein Punkt auf der negativen Seite der y-Achse und die Strecke PO ist gleich der Längeneinheit der $f(x, y)$ darstellenden Linien, so daß

$$\frac{OA''}{PO} = f(x_0, y_0).$$

Nun zieht man AB_1 rechtwinklig zu PA'', so daß man, wenn die Differenzen der Koordinaten von A und B_1 mit h und k_1 bezeichnet werden,

1) Siehe W. Kutta, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, S. 443.

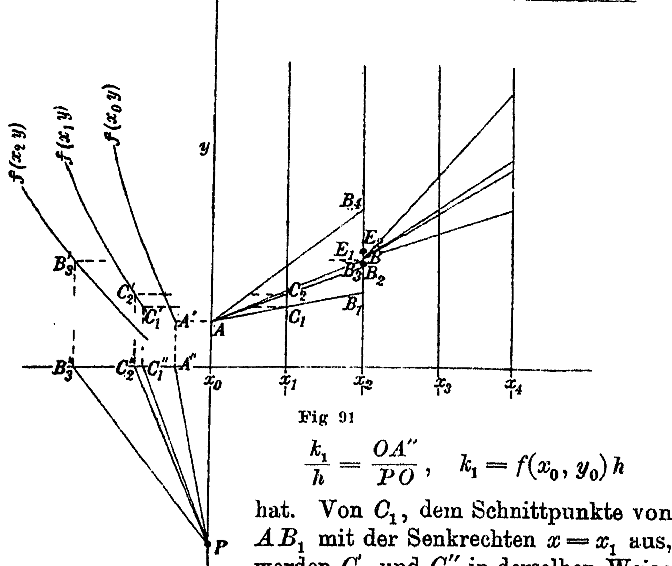


Fig 91

$$\frac{k_1}{h} = \frac{OA''}{PO}, \quad k_1 = f(x_0, y_0)\,h$$

hat. Von C_1, dem Schnittpunkte von AB_1 mit der Senkrechten $x = x_1$ aus, werden C_1' und C_1'' in derselben Weise bestimmt, wie A' und A'' von A aus, nur daß man C_1' auf der Kurve zu suchen hat, die die Werte von $f(x_1, y)$ darstellt. Dann zieht man die Linie AB_2 rechtwinklig zu PC_1''. Man hat nun, wenn die Differenz der Ordinaten von A und B_2 mit k_2 bezeichnet wird,

$$\frac{k_2}{h} = \frac{OC_1''}{PO} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right),$$

oder

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h.$$

Von C_2, dem Schnittpunkte der Geraden AB_2 mit der Senkrechten $x = x_1$ aus, findet man ebenso einen Punkt B_3 auf der Senkrechten $x = x_2$ und die Differenz k_3 zwischen der Ordinate von B_3 und der von A ist dann

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h.$$

Von B_3 gelangt man auf der Horizontalen zu B_3' auf der $f(x_2, y)$ darstellenden Kurve und auf der Senkrechten hinunter zu B_3''. Dann wird AB_4 rechtwinklig zu PB_3'' gezogen, so daß die Differenz k_4 zwischen den Ordinaten von B_4 und A

$$k_4 = f(x_0 + h; y + k_3)h$$

ist. Die Halbierung der Strecken B_2B_3 und B_1B_4 ergibt die Punkte

E_1 und E_2 und der Punkt B liegt zwischen E_1 und E_2 so, daß seine Entfernung von E_1 halb so groß ist wie die von E_2. Der Punkt B fällt dann mit großer Genauigkeit auf einen Punkt, der die Differentialgleichung befriedigenden Kurve, die durch A hindurchgeht.

B dient nun als neuer Ausgangspunkt, wie vorher A, und auf diese Weise findet man nach einander eine Reihe von Punkten der gesuchten Kurve.

Um sich von der erreichten Genauigkeit einen Begriff zu machen, kann man die Entfernung der parallelen Hilfslinien vergrößern. Man kann z. B. die Senkrechten $x = x_1$ und $x = x_3$ auslassen und den Punkt auf der Senkrechten $x = x_4$ mit einem Schritt, statt mit zweien erreichen. Der Fehler dieses Punktes sollte dann etwa sechzehnmal so groß sein wie bei dem vorhergehenden in zwei Schritten ausgeführten Verfahren, so daß der Fehler des ersteren Punktes etwa ein Fünfzehntel der Entfernung zwischen beiden Punkten betragen sollte. Ist ihre Entfernung nun so gering, daß sie nicht in Betracht kommt, dann sind die Schritte unnötig klein gewählt.

Die Werte $f(x, y)$ können unter Umständen so groß werden, daß man eine gar zu kleine Längeneinheit anwenden müßte, um sie auftragen zu können. In diesem Falle muß man x und y vertauschen und die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

schreiben. Dann trägt man die Werte von $\frac{1}{f(x, y)}$ für äquidistante Werte von y als Ordinaten zur Abszisse x auf und ändert dementsprechend die Konstruktionen.

§ 16. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung können in der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

geschrieben werden. Führen wir anstatt des zweiten Differentialkoeffizienten den Krümmungsradius ein und denken wir uns, daß wir auf einer die Gleichung befriedigenden Kurve entlang gehen in einer Richtung, die durch den Winkel α, den sie mit der positiven x-Achse bildet, bestimmt wird (der Winkel auf die übliche Art von der positiven x-Achse durch 90 Grad bis zur positiven y-Achse und weiter gezählt), so haben wir, wenn s die Länge der Kurve von unserem Ausgangspunkte an bezeichnet,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha.$$

Folglich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\cos^3\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{ds} \quad \text{oder} \quad \frac{d\alpha}{ds} = \cos^3\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$\frac{d\alpha}{ds}$ gibt die „Krümmung", d. h. das Maß der Richtungsänderung beim Fortschreiten auf der Kurve an und wird positiv gezählt, wenn die Änderung nach der Seite der höheren α-Werte stattfindet (wenn die positive x-Achse nach rechts und die positive y-Achse nach oben liegen, bedeutet ein positiver Wert von $\frac{d\alpha}{ds}$, daß die Bahn sich nach links wendet). Geben wir dem Krümmungsradius dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d\alpha}{ds}$ und bezeichnen wir ihn mit ϱ, so haben wir

$$\frac{1}{\varrho} = \cos^3\alpha\, f(x, y, \operatorname{tg}\alpha).$$

Man kann also sagen, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung den Krümmungsradius als Funktion des Orts und der Richtung ausdrückt.

Nehmen wir an, daß diese Funktion dreier Veränderlicher durch ein Diagramm so dargestellt sei, daß die Länge und das Vorzeichen von ϱ für jeden beliebigen Punkt und jede beliebige Richtung leicht zu ermitteln sind.

Von irgend einem gegebenen Punkte und in einer gegebenen Richtung ausgehend, kann man dann die die Differentialgleichung befriedigende Kurve durch eine Reihe von Kreisbögen annähern. Sei A (Fig. 92) der Ausgangspunkt. Man zieht $M_a A$ rechtwinklig zur gegebenen Richtung und gibt ihm die Länge ϱ. Für positive Werte von ϱ muß M_a auf der positiven Seite der gegebenen Richtung, für negative auf ihrer negativen Seite liegen. M_a ist der Krümmungsmittelpunkt der Kurve im Punkte A. Man schlägt nun mit $M_a A$ als Radius um M_a einen Kreisbogen AB und zieht die Verbindungslinie BM_a. Auf dieser Geraden oder ihrer Verlängerung wird der Punkt M_b bezeichnet, dessen Entfernung von B gleich dem ϱ-Werte ist, der B und der Richtung des Kreisbogens bei B entspricht. Nun wird um M_b mit dem Radius $M_b B$ ein Kreisbogen BC geschlagen, usw.

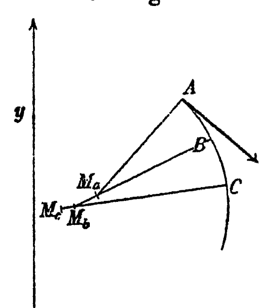


Fig. 92.

Der Krümmungsradius der gesuchten Kurve ändert sich stetig, während sich der unserer Annäherung in A, B, C ... sprungweise ändert. Je kleiner man die Kreisbögen wählt, um so geringer wird, wenn die Kreisbögen genau gezeichnet sind, die Abweichung der Annäherung von der wahren Kurve sein. Aber es ist zu beachten, daß beim Übergang von einem Kreisbogen zum anderen kleine Fehler unvermeidlich sind. Daher wird die Genauigkeit, wenn man die Kreisbögen so klein macht, daß ihre Zahl für ein gegebenes Kurvenstück ungebührlich groß wird, doch nicht größer werden, als sie sich auch mit längeren Kreisbögen erzielen läßt. Die günstigste Länge läßt sich mathematisch schwer bestimmen; es muß dies der Erfahrung des Zeichners überlassen bleiben.

Etwas ist zu gewinnen, indem man Mittelpunkte und Radien der Kreisbögen von den angegebenen Werten abweichen läßt. Der Kreisbogen AB (Fig. 92) ist offenbar mit einem zu kleinen Radius geschlagen, da der Radius der Kurve nach B zunimmt. Hätte man M_b als Radius genommen, so wäre er zu groß gewesen. Offenbar erhält man also eine bessere Annäherung, indem man den Radius des ersten Kreisbogens dem Mittel von $M_a B$ und $M_b B$ gleich macht, und auch die Richtung, in der dieser Bogen seinen Endpunkt erreicht, wird der wahren Richtung näher kommen.

Um sich das Auftragen zu erleichtern, empfiehlt es sich ein Instrument zu benutzen, das in einem flachen Lineal besteht, an dessen einem Ende sich ein Loch zur Aufnahme eines Bleistifts, eines Kapillarrohres, oder einer sonstigen Vorrichtung zum Linienziehen befindet. Längs der Mitte des Lineals läuft eine gerade Linie mit Skalenteilung und ein kleiner Dreifuß aus Nähnadelspitzen wird mit einem Fuße auf diese Linie und mit zwei Füßen auf das Papier gestellt. So beschreibt der Bleistift einen Kreisbogen. Wenn der Radius geändert werden soll, wird das Lineal in seiner Lage erhalten, indem man es auf das Papier drückt bis der Dreifuß an eine andere Stelle gerückt ist. Mit Hilfe dieser Vorrichtung gelingt es den Bleistift genau in derselben Richtung weiterzuleiten, während es bei Benutzung eines gewöhnlichen Zirkels nicht leicht ist, kleine Unebenheiten der Kurve an den Punkten, wo zwei Kreisbögen zusammenstoßen, zu vermeiden.

Eine andere Methode besteht in der Verallgemeinerung der Methode zur graphischen Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

kann in der Form zweier simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

Betrachten wir die allgemeinere Form, wo die Differentialkoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ als Funktionen von x, y, z gegeben sind:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$

Man kann x, y, z als die Koordinaten eines Punktes im Raume und die Differentialgleichung als ein Gesetz auffassen, das für jeden Punkt im Raume, wo $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ definiert sind, eine gewisse Richtung oder die ihr entgegengesetzte vorschreibt. Eine Kurve im Raume genügt der Differentialgleichung, wenn sie niemals von der vorgeschriebenen Richtung abweicht. Ihre Projektion in der xy-Ebene stellt die Funktion y dar und ihre Projektion in der xz-Ebene die Funktion z.

Stellen wir y und z als Ordinaten und x als Abszisse in derselben Ebene und mit demselben Koordinatensystem dar. Jeder beliebige Punkt im Raume wird durch zwei Punkte mit der gleichen Abszisse dargestellt. Die Funktionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ seien entweder durch Diagramme oder durch gewisse Konstruktions- oder Rechenmethoden gegeben. Für irgendeinen Punkt, mit dem wir es zu tun haben, werden die Werte von $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ als Ordinaten zur Abszisse x aufgetragen, der Übersicht halber aber nicht im gleichen Koordinatensystem wie y und z, sondern in einem anderen mit der gleichen Ordinatenachse und einer zu der ersten x-Achse parallelen und von ihr hinreichend weit entfernten x-Achse, damit die Zeichnungen in beiden Systemen nicht übereinander greifen.

Unser Ausgangspunkt sei irgendein Punkt $P(x_p, y_p, z_p)$ im Raume. Wir stellen ihn dar durch zwei Punkte $P_1(x_p, y_p)$ und $P_2(x_p, z_p)$ im ersten Koordinatensystem und zugleich die Werte von $f(x_p, y_p, z_p)$ und $g(x_p, y_p, z_p)$ durch die zwei Punkte A_1 und A_2 im zweiten Koordinatensystem (Fig. 93). Die Punkte A_1 und A_2 bestimmen gewisse Richtungen MA_1' und MA_2' der Kurven x, y und x, z. M (Fig. 93) ist ein Punkt, dessen Entfernung von der Ordinatenachse gleich der Längeneinheit ist, in der die $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ darstellenden Ordinaten gemessen sind. Durch P_1 und P_2 zieht man Parallelen zu MA_1' und MA_2' bis zu den Punkten Q_1 und Q_2 mit den Koordinaten x_q, y_q, und x_q, z_q. Mit diesen Koordinaten sind die Werte $f(x_q, y_q, z_q)$

und $g(x_q, y_q, z_q)$ bestimmt, welche man durch die Ordinaten der Punkte B_1 und B_2 darstellt. Diese Punkte wieder bestimmen gewisse Richtungen, zu denen man die Parallelen Q_1R_1 und Q_2R_2 zieht usw. Auf diese Weise findet man erste Annäherungen y_1 und

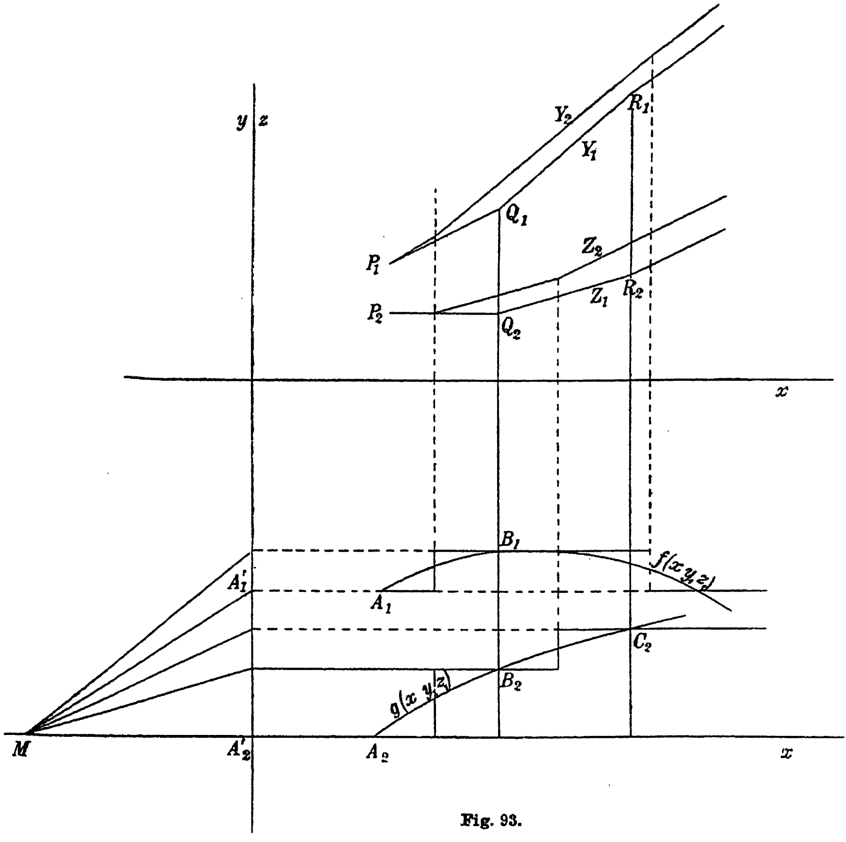


Fig. 93.

z_1 für die Funktionen y und z und, diesen Annäherungen entsprechend, Kurven, welche $f(x, y_1, z_1)$ und $g(x, y_1, z_1)$ darstellen. Diese Kurven werden nun graphisch integriert, wobei die Integralkurve von $f(x, y_1, z_1)$ in P_1 und die Integralkurve von $g(x, y_1, z_1)$ in P_2 anfängt, und führen zu zweiten Annäherungen y_2 und z_2:

$$y_2 = y_p + \int_p^x f(x, y_1, z_1)\,dx, \quad z_2 = z_p + \int_p^x g(x, y_1, z_1)\,dx.$$

Für diese zweiten Annäherungen bestimmt man die Werte von $f(x, y_2\, z_2)$ und $g(x, y_2, z_2)$ an einer Reihe von Punkten längs der Kurven x, y_2 und x, z_2, die hinreichend dicht liegen um die Konstruktion der $f(x, y_2, z_2)$ und $g(x, y_2, z_2)$ darstellenden Kurven genau genug zu machen. Durch ihre Integration erhält man eine dritte Annäherung y_3, z_3:

$$y_3 = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y_2, z_2)\, dx, \qquad z_3 = z_p + \int_{x_p}^{x} g(x, y_2, z_2)\, dx,$$

und fährt damit fort, solange eine Abweichung der letzten Annäherung von der vorhergehenden noch bemerkbar ist. Sobald sich für eine gewisse Entfernung $x - x_p$ keine Abweichung mehr nachweisen läßt, hat man die die wahre Lösung darstellende Kurve erreicht (soweit die Genauigkeit der Zeichnung es zuläßt). Die Kurve wird fortgesetzt, indem man ihren letzten Punkt zum Ausgangspunkt eines neuen gleichartigen Verfahrens macht.

Das Intervall, über das das Integral zu erstrecken ist, darf im allgemeinen eine gewisse Grenze nicht überschreiten, wo die Konvergenz der Annäherungen aufhört, aber es steht uns frei, es so klein wie wir wollen zu wählen. Damit wächst dann freilich die Zahl der Schritte, die erforderlich ist, um eine gewisse Entfernung zu erreichen. Es ist offenbar nicht zweckmäßig, das Intervall zu klein zu machen, vielmehr werden wir es so groß wie möglich wählen, wenn nur die Zahl der Annäherungen nicht über Gebühr wächst.

In dem Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

ist $f(x, y, z) = z$ und die Kurve z, x ist mit der Kurve identisch, die die Werte von $f(x, y, z)$ darstellt. Wir brauchen sie daher nicht noch einmal zu zeichnen.

Der Beweis der Konvergenz der Annäherungen ist beinahe derselbe wie in dem Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Für die $n + 1$-te Annäherung haben wir

$$y_{n+1} = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y_n, z_n)\, dx; \qquad z_{n+1} = z_p + \int_{x_p}^{x} g(x, y_n, z_n)\, dx.$$

Für die wahre Kurve, die durch den Punkt x_p, y_p, z_p geht, finden wir durch Integration die Gleichungen

$$y = y_p + \int_{x_p}^{x} f(x, y, z)\,dx; \qquad z = z_p + \int_{x_p}^{x} g(x, y, z)\,dx$$

daher
$$y_{n+1} - y = \int_{x_p}^{x} [f(x, y_n, z_n) - f(x, y, z)]\,dx$$

$$z_{n+1} - z = \int_{x_p}^{x} [g(x, y_n, z_n) - g(x, y, z)]\,dx.$$

Nun schreiben wir

$$f(x, y_n, z_n) - f(x, y, z) = \frac{f(x, y_n, z_n) - f(x, y, z_n)}{y_n - y}(y_n - y)$$
$$+ \frac{f(x, y, z_n) - f(x, y, z)}{z_n - z}(z_n - z),$$

und ebenso
$$g(x, y_n, z_n) - g(x, y, z) = \frac{g(x, y_n, z_n) - g(x, y, z_n)}{y_n - y}(y_n - y)$$
$$+ \frac{g(x, y, z_n) - g(x, y, z)}{z_n - z}(z_n - z).$$

Die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x, y_n, z_n) - f(x, y, z_n)}{y_n - y}$$

und die drei anderen sind gleich gewissen Werten von $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$ für Werte der Veränderlichen zwischen y und y_n und zwischen z und z_n (y, y_n, z, z_n selbst nicht ausgeschlossen). Nehmen wir an, daß für den Bereich aller in Betracht kommenden Werte von x, y, z der absolute Betrag von $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht größer ist als M_1 und der von $\frac{\partial g}{\partial y}$ und $\frac{\partial g}{\partial z}$ nicht größer als M_2 und daß δ_n, ε_n das Maximum der absoluten Beträge von $y - y_n$ und $z - z_n$ in dem Intervall x_p bis x bezeichnen, dann folgt, daß die absoluten Beträge von

$$f(x, y_n, z_n) - f(x, y, z) \quad \text{und} \quad g(x, y_n, z_n) - g(x, y, z)$$

nicht größer sind als

$$M_1(\delta_n + \varepsilon_n) \quad \text{und} \quad M_2(\delta_n + \varepsilon_n).$$

Daher erhalten wir für die größten absoluten Werte von $y_{n+1} - y$ und $z_{n+1} - z$, die durch δ_{n+1} und ε_{n+1} bezeichnet sein mögen, die oberen Grenzen

$$\delta_{n+1} \leqq M_1(\delta_n + \varepsilon_n)\,|x - x_p|, \qquad \varepsilon_{n+1} \leqq M_2(\delta_n + \varepsilon_n)\,|x - x_p|,$$

und $$\delta_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \leqq (M_1 + M_2) \,|\, x - x_p \,|\, (\delta_n + \varepsilon_n).$$

Wenn daher das Integrationsintervall $x - x_p$ soweit beschränkt wird, daß
$$(M_1 + M_2) \,|\, x - x_p \,| \leqq k < 1,$$
dann ist $\delta_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$ nicht größer als der Bruchteil k von $(\delta_n + \varepsilon_n)$, aber aus demselben Grunde ist
$$(\delta_n + \varepsilon_n) \leqq k(\delta_{n-1} + \varepsilon_{n-1}), \quad (\delta_{n-1} + \varepsilon_{n-1}) \leqq k(\delta_{n-2} + \varepsilon_{n-2}) \text{ usw.}$$
und folglich $$\delta_{n+1} + \varepsilon_{n+1} \leqq k^n(\delta_1 + \varepsilon_1).$$
Das heißt: für einen hinreichend großen Wert von n werden δ_{n+1} und ε_{n+1} beide so klein wie wir wollen.

Gerade so wie bei der Differentialgleichung erster Ordnung lohnt es sich in der Regel nicht, die Konvergenz zu untersuchen, um die Größe des Intervalles und die Zahl der Operationen zu ermitteln, die eine hinreichend genaue Annäherung der graphischen Methode verbürgen. Es ist besser, durch Zeichnung der Annäherungen sofort die Aufgabe anzugreifen und die Operationen solange zu wiederholen, bis sich keine Verbesserung mehr ergibt. Die Kurve wird dann der Differentialgleichung genügen, soweit die Genauigkeit der graphischen Methoden geht.

Wenn die Werte von $f(x, y, z)$ oder $g(x, y, z)$ zu groß werden so können wir denselben Kudstgriff anwenden wie bei der Differentialgleichung erster Ordnung. An Stelle von x können wir eine der beiden anderen Veränderlichen y oder z als Unabhängige betrachten, so daß die Gleichungen die Gestalt annehmen
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y, z)}, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{g(x, y, z)}{f(x, y, z)}$$
$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{g(x, y, z)} \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)},$$
oder wir können auch ein neues Koordinatensystem x', y', z' einführen und die Differentialgleichungen betrachten, die sich hierfür ergeben.

Die zweite Methode der Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung kann ebenfalls auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt werden. Wir betrachten gleich den allgemeineren Fall
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z).$$
Wir gehen aus von einem Punkte mit den Koordinaten x, y, z und berechnen die Änderungen von y und z (die mit k und l bezeichnet

werden) für eine kleine Änderung h von x durch die folgenden den früheren analogen Formeln

$$k_1 = f(x, y, z)\,h; \qquad l_1 = g(x, y, z)\,h;$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}, z + \frac{l_1}{2}\right)h; \quad l_2 = g\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}, z + \frac{l_1}{2}\right)h;$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}, z + \frac{l_2}{2}\right)h; \quad l_3 = g\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}, z + \frac{l_2}{2}\right)h;$$

$$k_4 = f(x + h, y + k_3, z + l_3)\,h; \quad l_4 = g(x + h; y + k_3, z + l_3)\,h;$$

$$p = \frac{k_2 + k_3}{2}, \quad q = \frac{k_1 + k_4}{2} \qquad p' = \frac{l_2 + l_3}{2} \quad q' = \frac{l_1 + l_4}{2};$$

und erhalten mit einem hohen Grad von Genauigkeit

$$k = p + \tfrac{1}{3}(q - p); \qquad l = p' + \tfrac{1}{3}(q' - p').$$

Die Rechnungen können nun graphisch ausgeführt werden; zu diesem Zwecke müssen die Funktionen $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ in handlicher Form gegeben sein. Wir bemerken, daß in unseren Formeln die erste Veränderliche die Werte x, $\frac{x+h}{2}$, $x + h$ annimmt. Beim zweiten Schritt, wo $x + h$, $y + k$, $z + l$ die Koordinaten des Ausgangspunktes sind, die dabei dieselbe Rolle spielen wie x, y, z beim ersten Schritt, steht es uns frei, die Änderung der ersten Veränderlichen gleich der Änderung beim ersten Schritt zu machen, so daß sie in den Formeln des zweiten Schrittes die Werte $x + h$, $x + \frac{3}{2}h$, $x + 2h$ annimmt usw. für die folgenden Schritte. Alle Werte der ersten Veränderlichen können also als äquidistant angesehen werden. Bezeichnen wir diese äquidistanten Werte mit

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Die Werte von $f(x, y, z)$ und $g(x, y, z)$ kommen in allen unseren Formeln nur für die konstanten Werte

$$x = x_0, x_1, x_2, \ldots$$

vor. Für jede dieser Konstanten sind f und g Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher und müssen als solche graphisch durch Zeichnung der Kurven $f = \text{const.}$ und $g = \text{const.}$ dargestellt werden, wo jedem x-Werte eine besondere Zeichnung entspricht. Diese Zeichnungen muß man als die graphische Form, in der die Differentialgleichungen gegeben sind, betrachten. Es kann natürlich manchmal sehr unbequem sein, die analytische Form einer Differentialgleichung

in die graphische zu übersetzen, aber dieser Umstand kann nicht füglich der graphischen Methode zur Last gelegt werden.

Die Methode nun ist dieselbe wie bei der Differentialgleichung erster Ordnung. y und z sind die Ordinaten ein und desselben Koordinatensystems mit der Abszisse x. Es werden äquidistante Parallelen der Ordinatenachse mit den Abszissen

$$x = x_0, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \text{ usw.}$$

gezogen. Auf der ersten $x = x_0$ bezeichnet man zwei Punkte mit den Ordinaten y_0 und z_0, liest von der Zeichnung, die die Werte von $f(x_0, y, z)$ und $g(x_0, y, z)$ als Funktionen von y und z gibt, die Werte $f(x_0, y_0, z_0)$ und $g(x_0, y_0, z_0)$ ab und zieht die Verbindungslinien von x_0, y_0, und x_0, z_0 mit den Punkten

$$x_2, y_0 + k_1 \quad \text{und} \quad x_2, z_0 + l_1.$$

Die Schnittpunkte dieser Linien mit der Parallelen $x = x_1$ liefern die Punkte

$$x_1, y_0 + \frac{k_1}{2} \quad \text{und} \quad x_1, z_0 + \frac{l_1}{2}.$$

Mit diesen Ordinaten findet man auf der zweiten Zeichnung die Werte

$$f\left(x_1, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) \quad \text{und} \quad g\left(x_1, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right)$$

und kann vermittelst derselben die Verbindungslinien der Punkte x_0, y_0 und x_0, z_0 mit den Punkten

$$x_2, y_0 + k_2 \quad \text{und} \quad x_2, y_0 + l_2$$

ziehen. Die Schnittpunkte dieser Linien mit der Linie $x = x_1$ liefern die Punkte

$$x_1, y_0 + \frac{k_2}{2} \quad \text{und} \quad x_1, z_0 + \frac{l_2}{2},$$

und mit Hilfe dieser Ordinaten finden wir die Werte

$$f\left(x_1, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) \quad g\left(x_1, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right),$$

die uns in den Stand setzen, die Verbindungslinien von x_0, y_0 und x_0, z_0 mit den Punkten $x_2, y_0 + k_3$ und $x_2, z_0 + l_3$ zu ziehen.

Mit diesen beiden Ordinaten lesen wir auf dem dritten Diagramm $(x = x_2)$ die Werte

$$f(x_2, y_0 + k_3, z_0 + l_3) \quad \text{und} \quad g(x_2, y_0 + k_3, z_0 + l_3),$$

mit deren Hilfe wir schließlich die Verbindungslinien $x_0 y_0$ und $x_0 z_0$ mit $x_2, y_0 + k_4$ und $x_2, z_0 + l_4$ ziehen können.

So erhalten wir auf der Senkrechten $x = x_2$ vier Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 entsprechend $y_0 + k_1$, $y_0 + k_2$, $y_0 + k_3$, $y_0 + k_4$ und vier Punkte B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 entsprechend $z_0 + l_1$, $z_0 + l_2$, $z_0 + l_3$, $z_0 + l_4$ (Fig. 94).

$B_2 B_3$ und $B_1 B_4$ werden durch die Punkte C_1 und C_2 halbiert, $B'_2 B'_3$ und $B'_1 B'_4$ durch die Punkte C'_1, C'_2. Endlich werden $C_1 C_2$ und $C'_1 C'_2$ in drei gleiche Teile geteilt und die Punkte B und B' in den Teilpunkten angenommen, die C_1 und C'_1 am nächsten kommen.

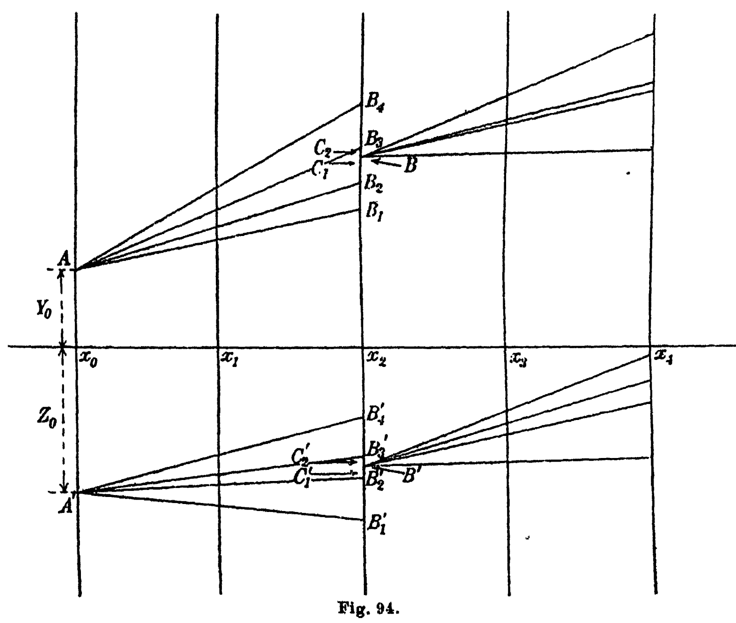


Fig. 94.

Dieselbe Konstruktion wird dann mit B und B' als Ausgangspunkten wiederholt und liefert zwei neue Punkte auf der Senkrechten $x = x_4$ usw. Um die Genauigkeit zu prüfen, wird die Konstruktion mit doppelt so großen Intervallen von x wiederholt. Die Abweichung in den Werten von y und z, die man für $x = x_4$ findet, setzt uns in den Stand, die Fehler der ersten Konstruktion abzuschätzen. Sie sind ungefähr gleich ein Fünfzehntel der beobachteten Unterschiede.

Beide Methoden lassen sich ohne Schwierigkeit verallgemeinern auf die Integration von Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Man kann eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Form schreiben

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}}\right),$$

oder auch in der Form von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = x_1,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}).$$

Eine allgemeinere und symmetrischere Form ist die folgende

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}),$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_2(t, x, x_1, \ldots x_{n-1}),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = f_n(t, x, x_1, \ldots x_{n-1}).$$

Die Funktionen x, x_1, x_2, x_{n-1} werden dann in demselben Koordinatensystem als Ordinaten zur Abszisse t aufgetragen, so daß wir n verschiedene Kurven erhalten. Wenn die Funktionen $f(t, x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$ in handlicher Form gegeben sind, so daß ihre Werte für irgend welche Werte von $t, x, x_1, \ldots x_{n-1}$ schnell gefunden werden können, so ist es leicht, n Kurven zu konstruieren, deren Ordinaten die Funktionen $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ darstellen. Von gegebenen Werten von $t, x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ ausgehend, brauchen wir nur dieselben Methoden anzuwenden, die für die erste und zweite Ordnung auseinandergesetzt worden sind.

